

Def. $f = (f_1, \dots, f_m) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall) heißt ab. in $t_0 \in I : \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = f'(t_0) \in \mathbb{R}^m$ existiert

$$\Leftrightarrow f_j \text{ in } t_0 \text{ ab. f\"ur alle } j, f'(t_0) = (f'_1(t_0), \dots, f'_m(t_0))$$

Analog (stetig) ab. auf I

Def. $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ Kurve; $\gamma(I)$ Spur von γ ; γ regul\"ar, wenn $\gamma'(t) \neq 0 \forall t \in I$; $\gamma(a)/\gamma(b)$ Anfangs-/Endpunkt; geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$; doppelpunktfrei, falls geschlossen und auf $[a, b)$ injektiv; $L(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ L\"ange

Def. $\gamma_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma_2 : J \rightarrow \mathbb{R}^m$ Kurven, $\phi : I \rightarrow J$ stetig ab. und bij. mit st. ab. Umkehrfkt., $\gamma_1(t) = \gamma_2(\phi(t)) \forall t \in I \leadsto \gamma_2$ Umparametrisierung von γ_1 ; orientierungs-
erhaltend/-umkehrend f\"ur $\phi' > / < 0$

Satz: $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$

Def. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ reg. Kurve, $s(t) := \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| d\tau$ Kurvenl\"angenfkt.; $\gamma_0 : [0, L(\gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^m, \gamma_0(t) = \gamma(s^{-1}(t))$ nat\"urliche Parametrisierung ($\|\gamma'_0(\tau)\| = 1 \forall \tau$)

$\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Def. $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, x_0 \in D$. f in x_0 in Richtung v ab.
 $\Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t}$ ex. (Richtungsabl.)

Def. $x_0 \in D, u \in \{1, \dots, n\}$. f in x_0 part. ab. nach x_u
 $\Leftrightarrow f_{x_u}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x_u}(x_0) := \frac{\partial f}{\partial e_u}(x_0)$ ex. (part. Abl. in x_0 nach x_u)

Def. f in $x_0 \in D$ part. ab. $\Leftrightarrow f$ in x_0 pab. nach $x_u \forall u$

Def. f in $x_0 \in D$ pab. $\Rightarrow J_f(x_0) := \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$
Jacobianmatrix, $m \times n$ Quadrat $\nabla f(x_0)$

Def. f in x_0 ab. $\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = 0$

f auf D ab. $\Leftrightarrow f$ in x_0 ab. f\"ur alle $x_0 \in D$

Satz: $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ db. Dann f in x_0 stetig, pdb
 und $A = J_f(x_0)$. $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = J_f(x_0)v (= \nabla f(x_0) \cdot v$ für $m=1$)
 für $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. $f'(x_0) := Df(x_0) := J_f(x_0)$ Abl. von f in x_0 .
Def: f in $x_0 \in D$ db, $f'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \frac{\partial (f_1, \dots, f_m)}{\partial (x_1, \dots, x_n)}(x_0)$ totale

Ableitung

- f auf D pdb $\Leftrightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x)$ ex. $\forall j, k, x$
- f auf D stetig pdb. $\Leftrightarrow f$ auf D pdb und alle part. Abl. sind stetig.

Satz: f auf D pdb, $x_0 \in D$ und alle part. Abl. seien in x_0 stetig
 $\Rightarrow f$ in x_0 db.

Def: f auf D stetig pdb, so heißt f auf D stetig db.
 und wir schreiben $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$.