Def: $f: D \to \mathbb{R}$ sei auf D part. nach x_k db.: Ist f_{x_k} in $x_0 \in D$ partiell nach x_j db., so heißt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(x_0) := f_{x_j x_k}(x_0) := (f_{x_k})_{x_j}(x_0)$$

part. Abl. zweiter Ordnung von f in x_0 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}\right)$

Def: $\cdot$ $f \in C^k(D, \mathbb{R})$ (k-mal st. db): $\Leftrightarrow$ Alle part. Abl. der Ordnung $\leq k$ ex. auf D und sind stetig ($k=0$: $\sim$ stetig)

$\cdot$ $f \in C^k(D, \mathbb{R}^m) :\Leftrightarrow f_1, \dots, f_m \in C^k(D, \mathbb{R})$

Schwarz

Satz: $f \in C^k(D, \mathbb{R})$, dann sind part. Abl. von Ord. $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge

Satz: $f: D \to \mathbb{R}$ in x_0 db., $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$

$\Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| \leq \|\operatorname{grad} f(x_0)\|$, „=" für $v = \pm \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{\|\operatorname{grad} f(x_0)\|}$

Kettenregel

Satz: $f: D \to \mathbb{R}^m$ in $x_0 \in D$ db., $G \subseteq \mathbb{R}^m$, $g: G \to \mathbb{R}^p$ in $y_0 = f(x_0)$ db., dann $g \circ f: D \to \mathbb{R}^p$ in x_0 db. mit

$$\underbrace{(g \circ f)'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{p \times n}} = \underbrace{g'(f(x_0))}_{\in \mathbb{R}^{p \times m}} \cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\in \mathbb{R}^{m \times n}}$$

Fall $p=1$: $g(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, $h := g \circ f$

$$\Rightarrow \frac{\partial h}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x)$$

Umkehrsatz

Satz: $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, $x_0 \in D$, $f'(x_0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar

$\Rightarrow \exists$ offene $U \subseteq D$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $x_0 \in U$, $y_0 := f(x_0) \in V$, $f: U \to V$ bij., $f^{-1}: V \to U$ stetig db. mit $(f^{-1})'(y) = (f'(f^{-1}(y)))^{-1}$ für alle $y \in V$.

Implizit def. Fkt.

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{p+m}$, $f \in C^1(D, \mathbb{R}^m)$, $(\underset{\in \mathbb{R}^p}{x_0}, \underset{\in \mathbb{R}^m}{y_0}) \in D$, $f(x_0, y_0) = 0$

und $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$ invertierbar

$\Rightarrow \exists$ offene Umg. U von x_0, V von y_0 und $g \in C^1(U, V)$, $U \times V \subseteq D$, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$ (für $(x, y) \in U \times V$)

$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ inv. $\forall (x, y) \in U \times V$ und

$$g'(x) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \quad \forall x \in U.$$

Def: $f \in C^2(D,\mathbb{R})$, $x_0 \in D$. Symmetrische **Hessematrix** von f in x_0:

$$H_f(x_0) := \begin{pmatrix} f_{x_1x_1}(x_0) & \cdots & f_{x_1x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1}(x_0) & \cdots & f_{x_nx_n}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Taylor

Satz: $f \in C^2(D,\mathbb{R})$, $x_0 \in D$, $h \in \mathbb{R}^n$, $S[x_0, x_0+h] := \{x_0 + th : t \in [0,1]\} \subseteq D$

$\Rightarrow \exists \xi \in S[x_0, x_0+h]$ mit

$$f(x_0+h) = f(x_0) + h \cdot \operatorname{grad} f(x_0) + \frac{1}{2}(H_f(\xi)h)\cdot h$$

Def: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex $:\Leftrightarrow$ Mit $a,b \in M$ ist $S[a,b] \subseteq M$

Def: M zus. offen. M Gebiet $:\Leftrightarrow$ Zu $a,b \in M$ ex. $a_0,\dots,a_m \in M$ mit $a_0 = a$, $a_m = b$ und $S[a_0,a_1] \cup \dots \cup S[a_{m-1},a_m] \subseteq M$

Satz: $D \subseteq \mathbb{R}^n$ Gebiet, $f \in C^1(D,\mathbb{R})$, $f'(x) = 0 \ \forall x \in D$, dann ist f auf D konstant

Def: $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$, $g: M \to \mathbb{R}$, $x_0 \in M$. g hat in x_0 lok. $\underbrace{\text{Min/Max}}_{\text{Ext.}}$

$:\Leftrightarrow \exists \delta > 0 : \ g(x) \leq / \geq g(x_0) \ \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M$

Satz: $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D$.

- f hat in x_0 lok. Extr. und ist pdb. $\Rightarrow \operatorname{grad} f(x_0) = 0$
- $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ und $f \in C^2(D,\mathbb{R}) \Rightarrow$ Ist $H_f(x_0)$ pos def./neg. def./indef, so hat f in x_0 ein lok. Min./lok. Max/kein lok. Extr.

Erinnerung: $H_f(x_0)$ pos./neg. def. $\Leftrightarrow$ Alle EW von $H_f(x_0)$ sind $>/< 0$

$$\Leftrightarrow \det(+/- A_m) > 0 \ \forall m \in \{1,\dots,n\},\ A_m = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$