Def: • $K \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt $:\Leftrightarrow \exists \gamma \geq 0 : \|x\| \leq \gamma \ \forall x \in K$

• $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt $:\Leftrightarrow$ Jede Folge in K enthält eine konv. TF mit Grenzwert in K.

Satz: Ist $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt ($\Leftrightarrow$ abg. + besch.) und $f: K \to \mathbb{R}^m$ stetig, so ist $f(K)$ kompakt (für $m=1$: f nimmt Max und Min. auf K an.)

Lagrange: $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$, $p \in \mathbb{N}$, $p < n$, $h = (h_1, \ldots, h_p) \in C^1(D, \mathbb{R}^p)$

$$L(x, \lambda_1, \ldots, \lambda_p) = f(x) + \lambda_1 h_1(x) + \ldots + \lambda_p h_p(x) \quad (x \in D, \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R})$$

Hat f in $x_0 \in D$ ein lok. Extr. unter der Nebenbedingung $h=0$ und ist $\operatorname{rang} h'(x_0) = p$ (voller Rang), so ex. $\lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0 \in \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad} L(x_0, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_p^0) = 0$

$\Leftrightarrow \operatorname{grad} f(x_0) = -\lambda_0^T h'(x_0)$ und $h=0$ (*)

Def: $f: D \to \mathbb{R}$ Skalarfeld, $v: D \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld ($D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen)

• f pdb auf $D \leadsto \partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}$

• $v \in C^1(D, \mathbb{R}^n) \leadsto \operatorname{div} v := \partial_1 v_1 + \ldots + \partial_n v_n$ <u>Divergenz von v</u>

• $v \in C^1(D, \mathbb{R}^3) \leadsto \operatorname{rot} v := \nabla \times v = \begin{pmatrix} \partial_2 v_3 - \partial_3 v_2 \\ \partial_3 v_1 - \partial_1 v_3 \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 \end{pmatrix}$ <u>Rotation von v</u>

• $f \in C^2(D, \mathbb{R}) \leadsto \Delta f := \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \partial_1^2 f + \ldots + \partial_n^2 f$ <u>Laplace</u>

• $v \in C^2(D, \mathbb{R}) \leadsto \Delta v := \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \vdots \\ \Delta v_n \end{pmatrix}$

Regeln: $f, g \in C^1(D, \mathbb{R})$, $v \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$.

• $\nabla(fg) = g(\nabla f) + f(\nabla g)$

• $\nabla \times (fv) = f \cdot (\nabla \times v) + (\nabla f) \times v \quad (n=3)$

• $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\nabla f)(\nabla g) + f(\Delta g) \quad (f, g \in C^2(D, \mathbb{R}))$

• $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0$, $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(v)) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}(v)) - \Delta v$
$(n=3, f \in C^2(D, \mathbb{R}), v \in C^2(D, \mathbb{R}^3))$

Def: $v \in C(D, \mathbb{R}^n)$ <u>Potentialfeld</u>, falls $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ ex. mit $v = \nabla f$ auf D (f Stammfunktion von v)

Satz: $v \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ Pot.-Feld, so gilt $\partial_j v_k = \partial_k v_j \quad (j, k = 1, \ldots, n)$
(Integrabilitätsbed.)

Def: $f: D \to \mathbb{R}$ stetig, $\gamma: [a,b] \to D$ reg. Kurve

$$\Rightarrow \int_\gamma f(x)\, ds := \int_a^b f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\|\, dt$$