Def: $v: D \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\gamma: [a,b] \to D$ Kurve, dann
$$\int_\gamma v(x)\cdot dx := \int_\gamma f(x)\, d\vec{s} := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\,dt$$

Satz: v, γ wie oben, $f: D \to \mathbb{R}$ stetig db, $\tilde\gamma$ orientierungserh. UP von γ

(1) $\int_{\gamma^-} v(x)\cdot dx = -\int_\gamma v(x)\cdot dx$ (2) $\int_{\tilde\gamma} v(x)\cdot dx = \int_\gamma v(x)dx$

$$(3) \int_\gamma \operatorname{grad} f(x)\cdot dx = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$$

Def: Gebiet D einfach zshg :$\Longleftrightarrow$ Zu jedem Streckenzug $S = S[a_0,\dots,a_m]$ $(a_0=a_m)$ in D ex. $c\in D$ und endlich viele Kurven $\gamma_0,\dots,\gamma_k:[0,1]\to D$ mit $S[\gamma_0(0),\dots,\gamma_k(0)] = S$, $\gamma_j(1) = c$ $\forall j\in\{0,\dots,k\}$, $S[\gamma_0(t),\dots,\gamma_k(t)] \subseteq D$ $\forall t\in[0,1]$.

Def: D heißt sternförmig :$\Longleftrightarrow$ $\exists x^*\in D$ mit $S[x,x^*]\subseteq D$ $\forall x\in D$

Satz: D Gebiet, $v: D\to\mathbb{R}^n$ stetig. Dann sind äquivalent

(1) v besitzt SF auf D

(2) $\int v(x)\cdot dx$ ist in D wegunabh. ($\int_\gamma v(x)\cdot dx$ hängt nur von $\gamma(a)$/$\gamma(b)$ ab)

(3) $\oint_\gamma v(x)\cdot dx = 0$ für alle geschlossenen Kurven γ.

Satz: D einf. zshg. Gebiet, $v=(v_1,\dots,v_n): D\to\mathbb{R}^n$ stetig db. Dann v besitzt SF auf D $\Longleftrightarrow$ $\partial_j v_k = \partial_k v_j$ auf D $(j,k=1,\dots,n)$

Def: $I := [a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ $(a_j\le b_j)$ komp. Int. in $\mathbb{R}^n$.

Inhalt/Volumen von I: $|I| = (b_1-a_1)\cdot\ldots\cdot(b_n-a_n)$.

Ist Z_j Zerlegung von $[a_j,b_j]$, so heißt $Z := Z_1\times\dots\times Z_n$ Zerlg. von I. Teilintervall $T = T_1\times\dots\times T_n$ von I bzgl. (T_j Teilinterv. von $[a_j,b_j]$ bzgl. Z_j.) $\rightsquigarrow$ $I = I_1\cup\dots\cup I_m$ (I_j alle Teilint.)

$|I| = |I_1|+\dots+|I_m|$. $f: I\to\mathbb{R}$ beschränkt, $m_j := \inf_{x\in I_j} f(x)$, $M_j = \sup_{x\in I_j} f(x)$, dann Ober-/Untersumme von f bzgl. Z

$$S_f(Z) := \sum_{j=1}^m M_j|I_j|, \quad s_f(Z) := \sum_{j=1}^m m_j |I_j|$$

Satz: (1) $Z\subseteq\tilde Z$ Zerlegung $\Rightarrow$ $s_f(Z)\le s_f(\tilde Z)\le S_f(\tilde Z)\le S_f(Z)$

(2) $\left(\inf_{x\in I} f(x)\right)|I| \le s_f(Z)\le S_f(Z)\le\left(\sup_{x\in I} f(x)\right)|I|$

Def: f ib. über I $:\Leftrightarrow$ $s_f := \sup\{s_f(Z) : Z$ Zerl. von $I\}$
$= \inf\{S_f(Z) : Z$ Zerl. von $I\} =: S_f$ $\quad (s_f \leq S_f$ immer$)$

Dann $\int_I f(x)\,dx := \int_I f\,dx := S_f \ (= s_f)$, $f \in R(I)$

Satz: I komp. Int., $f, g \in R(I)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(1) $\alpha f + \beta g,\ fg,\ |f| \in R(I)$, $\int_I \alpha f + \beta g\,dx = \alpha \int_I f\,dx + \beta \int_I g\,dx$,
$\left|\int_I f\,dx\right| \leq \int_I |f|\,dx$

(2) $f \leq g \Rightarrow \int_I f\,dx \leq \int_I g\,dx$

(3) $|f| \geq \alpha > 0 \Rightarrow \frac{1}{f} \in R(I)$

(4) $C(I, \mathbb{R}) \subseteq R(I)$

Fubini: $p, q \in \mathbb{N}$, $n = p + q$, $(x, y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$, $I_{1/2}$ komp. Int. in $\mathbb{R}^p / \mathbb{R}^q$, $I = I_1 \times I_2$, $f \in C(I, \mathbb{R})$

$$\Rightarrow \int_I f(x, y)\,d(x, y) = \int_{I_2}\left(\int_{I_1} f(x, y)\,dx\right)dy$$
$$= \int_{I_1}\left(\int_{I_2} f(x, y)\,dy\right)dx$$

$\overset{\text{Induktion}}{\Rightarrow}$ $I = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, $f \in C(I, \mathbb{R})$, dann

$$\int_I f(x_1, \ldots, x_n)\,d(x_1, \ldots, x_n) = \underbrace{\int_{a_1}^{b_1}\left(\ldots\left(\int_{a_n}^{b_n}\right.\right.}_{\text{bel. Reihenfolge}} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_n\Big)\ldots\Big)dx_1$$