Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. Peer Christian Kunstmann

Herbst 2010
21.09.2010

Diplom–Vorprüfung bzw. Bachelor–Modulprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 $\quad$ **(5 + (2 + 3) = 10 Punkte)**

a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden Differentialgleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ y_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

b) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Bestimmen Sie die Matrix e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$.

ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{wobei } t \in \mathbb{R},\ \vec{y}(t) \in \mathbb{R}^2.$$

Hinweis zu b):
Eine Bearbeitung von Aufgabenteil ii) ist auch ohne das Ergebnis aus i) möglich, in diesem Fall aber evtl. aufwendiger.

Aufgabe 2 $\quad$ **(4 + 6 = 10 Punkte)**

Lösen Sie jeweils das Anfangswertproblem und bestimmen Sie dabei insbesondere das maximale Existenzintervall der Lösung.

a) $y' = \dfrac{e^{2x} + y^4}{y^3}, \qquad y(0) = 1.$

b) $Pdx + Qdy = 0, \qquad y(\frac{\pi}{2}) = 1, \qquad$ wobei
$P := \cos(x+y)[y^2 - \sin x] - \cos x$ und $Q := \cos(x+y)[y^2 - \sin x] + 2y$.

Hinweise zu b):

1.) Es gibt einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x+y)$.
2.) Beim anschließenden Bestimmen eines Potentials F ist es möglicherweise hilfreich zu beachten, dass $\partial_x[y^2 - \sin x] = -\cos x$ (bzw. $\partial_y[y^2 - \sin x] = 2y$) gilt und dass Ausdrücke der Art $f'g + fg'$ eine Stammfunktion fg besitzen.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Lösen Sie mittels eines Potenzreihenansatzes das Anfangswertproblem

$$y'' - xy' + 2y = \sum_{n=0}^{\infty} 4(n^2 + n + 1)x^{2n}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

auf dem Intervall $(-1, 1)$.
Bestimmen Sie anschließend eine Darstellung für die rechte Seite in geschlossener Form.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0\}$. Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x\partial_y u - y\partial_x u = \frac{x^2 + y^2}{2u}$$

in D und bestimmen Sie die Lösung $u = u(x, y)$ dieser Differentialgleichung, die der Bedingung

$$u(\xi, 0) = \sqrt{\pi}\xi \text{ für alle } \xi > 0$$

genügt. Wie sehen die Grundcharakteristiken aus?
Skizzieren Sie in der (x, y)-Ebene die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte vorgegeben sind, sowie einige Grundcharakteristiken (d.h. in etwa drei).
Überprüfen Sie, ob Ihre Berechnung tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung geliefert hat.
Auf welcher Teilmenge von D ist die von Ihnen berechnete Lösung erklärt?

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 13.10.2010, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, den 20.10.2010, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Daimler-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 25.10.2010 bis 29.10.2010 im Allianz-Gebäude 05.20.