Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P.C. Kunstmann

Herbst 2011
21.09.2011

Bachelor–Modulprüfung bzw. Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 $\quad$ **(5 + (2 + 3) = 10 Punkte)**

a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für das folgende Differentialgleichungssystem

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

sowie die Lösung zum Anfangswert $\vec{y}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 2e \end{pmatrix}$.

b) Sei

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

i) Bestimmen Sie e^{tB} für jedes $t \in \mathbb{R}$.

ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = B\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu b): Eine Bearbeitung von Aufgabenteil ii) ist auch ohne das Ergebnis aus i) möglich, in diesem Fall aber eventuell aufwendiger.

Aufgabe 2 $\quad$ **(5 + 5 = 10 Punkte)**

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2x \tan y \, dx + x^2 \, dy = 0\,, \qquad y(1) = \frac{\pi}{4}$$

in $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| < \pi/2\}$. Geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.

b) Lösen Sie (für $x > 0$) das Anfangswertproblem

$$y' = x^3 y^2 + \frac{y}{x} - x^5\,, \qquad y(1) = 3$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Hinweis: Es gibt eine Polynomlösung der Differentialgleichung.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + x^2 y' + 2xy = ax + b$$

durch einen Potenzreihenansatz.

Bestimmen Sie die Menge aller Paare $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, für die es polynomiale Lösungen gibt.

Aufgabe 4 (6 + 4 = 10 Punkte)

Betrachten Sie die Gleichung

$$3x\, \partial_x u + y\, \partial_y u = f(x, y, u)$$

in $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y > 0\}$. Lösen Sie die Gleichung mithilfe der Charakteristikenmethode unter der Bedingung

$$u(\xi^4, \xi) = \frac{1}{\xi}, \qquad \xi > 0$$

für

a) $f(x, y, u) = \dfrac{x}{y^3}\, u\,,$

b) $f(x, y, u) = \dfrac{x}{y^3}\, u^2\,.$

Geben Sie jeweils den Definitionsbereich $\widetilde{D} \subseteq D$ der Lösung an.

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:
Die Klausurergebnisse hängen ab Mittwoch, den 12.10.2011, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

`www.math.kit.edu/iana1`

im Internet. Die **Klausureinsicht** findet am Donnerstag, den 20.10.2011, von 16:00 bis 18:00 Uhr im Benz-Hörsaal statt. Die mündlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom 24.10.2011 bis 28.10.2011 im Allianz-Gebäude 05.20.