

Bachelor – Modulprüfung
Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

- a) Lösen Sie für $x > 0$ das folgende Riccati'sche Anfangswertproblem

$$y' + \frac{1}{x^2}y^2 = -\frac{1}{4}, \quad y(1) = 0.$$

Hinweis: Die Differentialgleichung hat eine Lösung der Form $\varphi(x) = ax$ für ein $a \in \mathbb{R}$.

- b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(y')^2 - 4xy' + 4y = 0.$$

- (i) Bestimmen Sie möglichst viele Lösungen dieser Differentialgleichung in expliziter Form.
(ii) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$(y')^2 - 4xy' + 4y = 0, \quad y(0) = y_0,$$

für jedes $y_0 \leq 0$ eine Lösung besitzt. Für welche $y_0 \leq 0$ ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar?

Aufgabe 2 (5 + 5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

- a) Berechnen Sie e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.
b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}'(t) = A\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 4t \\ -2t \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 (6 + 4 Punkte)

a) Geben Sie die allgemeine (reelle) Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$x^2 y'' + xy' - y = x \ln(x), \quad x > 0.$$

b) Lösen Sie mit einem gewöhnlichen Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2xy'(x) + 12y(x) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In $D := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ betrachte man für $u = u(x, t)$ die Differentialgleichung

$$t^2 \partial_t u - \partial_x u = xt^2 u$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(0, \xi) = \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit dem Charakteristikenverfahren und skizzieren Sie drei verschiedene Grundcharakteristiken in der (x, t) -Ebene.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die **Klausurergebnisse** hängen ab Freitag, dem **11.10.2013**, am Schwarzen Brett neben Zimmer 3A-17 (Allianz-Gebäude 05.20) aus und liegen unter

<http://www.math.kit.edu/iana1>

im Internet.

Die **Klausureinsicht** findet am Mittwoch, dem **23.10.2013**, von 16 bis 18 Uhr im Fasanengarten-Hörsaal (HS a.F.) (Geb. 50.35) statt.

Die **mündlichen Nachprüfungen** sind in der Woche vom **28.10.2013** bis **31.10.2013** im Allianzgebäude (Geb. 05.20).