KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) Herbst 2013
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Markus Antoni

Bachelor – Modulprüfung

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Wir wollen zunächst eine spezielle Lösung der Form $\varphi(x) = ax$ finden. Setzen wir diese Funktion in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$\varphi'(x) + \frac{1}{x^2}\varphi(x)^2 = a + \frac{1}{x^2}a^2x^2 \overset{!}{=} -\frac{1}{4} \iff a^2 + a + \frac{1}{4} = 0 \iff a = -\frac{1}{2}.$$

Also ist $\varphi(x) = -\frac{1}{2}x$ eine spezielle Lösung, die allerdings nicht die Anfangsbedingung erfüllt. Die Substitution $z(x) := (y(x) - \varphi(x))^{-1}$ führt dann auf die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) = -\frac{1}{x}z(x) + \frac{1}{x^2}$$

mit dem Anfangswert $z(1) = (y(1)-\varphi(1))^{-1} = 2$. Die zugehörige Lösung der homogenen Gleichung ist

$$z_{\text{hom}}(x) = c\exp\big(\int -\tfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x\big) = c\exp(-\ln x) = c\tfrac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine spezielle Lösung der Differentialgleichung für z erhalten wir mit Variation der Konstanten. Setzen wir den Ansatz $z_{\text{p}}(x) = c(x)\frac{1}{x}$ in die inhomogene Gleichung ein, so erhalten wir

$$c'(x)\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \iff c'(x) = \frac{1}{x} \iff c(x) = \ln(x) + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Wir wählen $z_{\text{p}}(x) = \ln(x)\frac{1}{x}$ und erhalten als allgemeine Lösung

$$z(x) = z_{\text{p}}(x) + z_{\text{hom}}(x) = \ln(x)\frac{1}{x} + c\frac{1}{x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf $z(1) = c = 2$, d.h.

$$z(x) = \ln(x)\frac{1}{x} + \frac{2}{x}.$$

Rücksubstitution liefert uns schließlich die Lösung

$$y(x) = \frac{x}{2 + \ln(x)} - \frac{1}{2}x, \qquad \text{für } x > e^{-2}.$$

b) (i) Hier liegt eine implizite Differentialgleichung vor. Wir betrachten also zunächst Geraden als Lösungen (d.h. y' ist konstant). Setzen wir den Ansatz $y(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, in die Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$(y')^2 - 4xy' + 4y = a^2 - 4ax + 4(ax + b) = 0 \iff a^2 + 4b = 0 \iff b = -\frac{1}{4}a^2.$$

D.h. $y(x) = ax - \frac{1}{4}a^2$ ist eine Lösung der Differentialgleichung für jedes $a \in \mathbb{R}$.

Für den Fall, dass y' nicht konstant ist, setzen wir $t := y'(x)$, $\psi(t) := x$ und $\chi(t) := y$. Dann gilt

$$\chi' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = t\psi'.$$

Einsetzen des Ansatzes liefert außerdem

$$t^2 - 4\psi(t)t + 4\chi(t) = 0 \iff \chi(t) = t\psi(t) - \frac{1}{4}t^2.$$

Zusammen führt dies auf die Gleichung

$$t\psi'(t) = \chi'(t) = \psi(t) + t\psi'(t) - \frac{1}{2}t \iff \psi(t) = \frac{1}{2}t.$$

D.h. $\chi(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}t^2 = \frac{1}{4}t^2 = \psi(t)^2$. Rücksubstitution liefert dann die (in diesem Fall einzige) Lösung

$$y(x) = x^2.$$

(ii) Wir unterscheiden die beiden Fälle aus Teilaufgabe (i).

<u>1. Fall:</u> $y(x) = ax - \frac{1}{4}a^2$. In diesem Fall führt die Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ auf $y_0 = -\frac{1}{4}a^2$. Da $y_0 \leqslant 0$ folgt in diesem Fall $a_{1/2} = \pm 2\sqrt{-y_0} = \pm 2\sqrt{|y_0|}$. Ist also $y_0 = 0$, so ist $y \equiv 0$ eine Lösung, und ist $y_0 < 0$, so erhalten wir die beiden Lösungen

$$y_1(x) = 2\sqrt{|y_0|}x + y_0, \quad y_2(x) = -2\sqrt{|y_0|}x + y_0.$$

<u>2. Fall:</u> $y(x) = x^2$. In diesem Fall erhalten wir eine Lösung, falls $y_0 = y(0) = 0$ gilt.

Als Ergebnis erhalten wir, dass das Anfangswertproblem lösbar ist für $y_0 \leqslant 0$. Im Fall $y_0 = 0$ erhalten wir die beiden Lösungen

$$y_1 \equiv 0 \quad \text{und} \quad y_2(x) = x^2.$$

Im anderen Fall, d.h. $y_0 < 0$, erhalten wir ebenfalls zwei verschiedene Lösungen, nämlich

$$y_1(x) = 2\sqrt{|y_0|}x + y_0 \quad \text{und} \quad y_2(x) = -2\sqrt{|y_0|}x + y_0.$$

Die Gleichung ist also nie eindeutig lösbar.

Aufgabe 2

a) Wir geben zwei verschiedene Möglichkeiten zur Berechnung von e^{tA} an.

1. Möglichkeit: Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = -4I = -2^2 I.$$

Es folgt

$$A^3 = -2^2 A, \quad A^4 = 2^4 I, \quad A^5 = 2^4 A, A^6 = -2^6 I, ...$$

Induktiv erhalten wir

$$A^{2k} = (-1)^k 2^{2k} I, \quad A^{2k+1} = (-1)^k 2^{2k} A = \tfrac{1}{2}(-1)^k 2^{2k+1} A, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Setzen wir dies in die Exponentialreihe ein, so folgt schließlich

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n A^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} 2^{2k} t^{2k} I + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} 2^{2k+1} t^{2k+1} A \\ &= \cos(2t) I + \frac{1}{2}\sin(2t) A = \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) & -\sin(2t) \\ 5\sin(2t) & \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und Eigenräume von A. Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 10 & -4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4.$$

Also haben wir die beiden (komplexen) Eigenwerte $\lambda_{1/2} = \pm 2i$. Die zugehörigen Eigenräume sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(A - 2iI) &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 4-2i & -2 \\ 10 & -4-2i \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \mathrm{Kern}(A + 2iI) &= \mathrm{lin}\overline{\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}} = \mathrm{lin}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{5} - \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

Eine komplexe Lösung ist

$$\begin{aligned} \vec{\phi}(t) &= e^{2it} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos(2t) + i\sin(2t)) \begin{pmatrix} \frac{2}{5} + \frac{i}{5} \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{1}{5}\sin(2t) + \frac{2i}{5}\sin(2t) + \frac{i}{5}\cos(2t) \\ \cos(2t) + i\sin(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{1}{5}\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sin(2t) + \frac{1}{5}\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für die weitere Rechnung wählen wir nun bekanntlich Real- und Imaginärteil von $\vec{\phi}(t)$ als linear unabhängige Lösungen, d.h. wir erhalten das Fundamentalsystem

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\cos(2t) - \frac{1}{5}\sin(2t) & \frac{2}{5}\sin(2t) + \frac{1}{5}\cos(2t) \\ \cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Mit $\Phi(0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ erhalten wir schließlich

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(2t) + 2\sin(2t) & -\sin(2t) \\ 5\sin(2t) & \cos(2t) - 2\sin(2t) \end{pmatrix}.$$

b) Die Lösung des Anfangswertpoblems ergibt sich nun mit der Formel

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{mit} \quad \vec{b}(s) := \begin{pmatrix} 4s \\ -2s \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst das Integral. Hierbei tauchen die folgenden beiden Integrale auf, die wir mit partieller Integration berechnen können:

$$\int_0^t s\sin(2t-2s)\,\mathrm{d}s = [s\tfrac{1}{2}\cos(2t-2s)]_0^t - \int_0^t \tfrac{1}{2}\cos(2t-2s)\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4}\sin(2t),$$
$$\int_0^t s\cos(2t-2s)\,\mathrm{d}s = [-s\tfrac{1}{2}\sin(2t-2s)]_0^t + \int_0^t \tfrac{1}{2}\sin(2t-2s)\,\mathrm{d}s = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\cos(2t).$$

Dies führt uns dann auf

$$\begin{aligned}\int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s &= \int_0^t \begin{pmatrix} 10s\sin(2t-2s) + 4s\cos(2t-2s) \\ 24s\sin(2t-2s) - 2s\cos(2t-2s) \end{pmatrix} \mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} 5t - \frac{5}{2}\sin(2t) + 1 - \cos(2t) \\ 12t - 6\sin(2t) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir schließlich als Lösung

$$\begin{aligned}\vec{y}(t) &= e^{tA}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= \begin{pmatrix} \sin(2t) + \cos(2t) \\ 3\sin(2t) + \cos(2t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 + 5t - \frac{5}{2}\sin(2t) - \cos(2t) \\ -\frac{1}{2} + 12t - 6\sin(2t) + \frac{1}{2}\cos(2t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 5t - \frac{3}{2}\sin(2t) \\ -\frac{1}{2} + 12t - 3\sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Hier liegt eine Euler'sche Differentialgleichung vor. Wir machen zunächst die Substitution $t := \ln(x)$ bzw. $x = e^t$. Für $u(t) := y(e^t)$ bzw. $y(x) = u(\ln(x))$ erhalten wir dann

$$y' = \frac{1}{x}u' \quad \text{und} \quad y'' = -\frac{1}{x^2}u' + \frac{1}{x^2}u''.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir eine inhomogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten:

$$x^2y'' + xy' - y = x\ln x \iff u'' - u = te^t.$$

Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung für u mit dem Ansatz $u(t) = e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dieser führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

mit den beiden Nullstellen $\lambda_{1/2} = \pm 1$. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$u_{\mathrm{hom}}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung machen wir nun einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da vor e^t ein Polynom ersten Grades steht und da $\sigma + i\omega = 1 + i \cdot 0 = 1$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$u_{\mathrm{p}}(t) = (at + b)t^1 e^t = (at^2 + bt)e^t, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hier haben wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{p}}'(t) &= (at^2 + 2at + bt + b)e^t, \\ u_{\mathrm{p}}''(t) &= (at^2 + 4at + bt + 2a + 2b)e^t. \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so folgt

$$u_{\mathrm{p}}'' - u_{\mathrm{p}} = (4at + 2b + 2a)e^t \stackrel{!}{=} te^t \iff a = \frac{1}{4},\ b = -\frac{1}{4}.$$

Wir erhalten damit die spezielle Lösung $u_{\mathrm{p}}(t) = \frac{1}{4}t(t-1)e^t$, sowie die allgemeine Lösung

$$u(t) = \frac{1}{4}t(t-1)e^t + c_1 e^t + c_2 e^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Rücksubstitution führt schließlich auf die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung:

$$y(x) = \frac{1}{4}\ln(x)\big(\ln(x) - 1\big)x + c_1 x + c_2 \frac{1}{x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

b) Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

mit

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{und} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}$$

führt auf

$$\begin{aligned} y''(x) - 2xy'(x) + 12y(x) = {} & \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}}_{\stackrel{\ell=k-2}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1)a_{\ell+2}x^\ell} - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} 2ka_k x^k}_{= \sum_{k=0}^{\infty} 2ka_k x^k} + \sum_{k=0}^{\infty} 12a_k x^k \\ = {} & \sum_{k=0}^{\infty} \Big((k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + 12a_k\Big)x^k \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\iff (k+2)(k+1)a_{k+2} - 2ka_k + 12a_k = 0, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\iff a_{k+2} = \frac{2k - 12}{(k+2)(k+1)}a_k, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Mit den Anfangswerten folgt $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$. Laut Rekursionsvorschrift folgt damit

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{12}{2} \cdot a_0 = -6, \\
a_3 &= -\frac{10}{6} \cdot a_1 = 0, \quad \text{und damit: } a_k = 0 \quad \text{für alle ungeraden } k \in \mathbb{N}. \\
a_4 &= -\frac{8}{12} \cdot a_2 = 4, \\
a_6 &= -\frac{4}{30} \cdot a_4 = -\frac{8}{15}, \\
a_8 &= \frac{0}{56} \cdot a_6 = 0, \text{und damit erneut: } a_k = 0 \quad \text{für alle geraden } k \geqslant 8.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $a_0 = 1$, $a_2 = -6$, $a_4 = 4$, $a_6 = -\frac{8}{15}$ und $a_k = 0$ für $k \neq 0, 2, 4, 6$. Dies führt auf die Lösung

$$y(x) = -\frac{8}{15}x^6 + 4x^4 - 6x^2 + 1.$$

Aufgabe 4

Das charakteristische System dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned}
k_1'(s) &= -1, \quad k_1(0) = 0, \\
k_2'(s) &= k_2(s)^2, \quad k_2(0) = \xi, \\
w'(s) &= k_1(s)k_2(s)^2 w(s), \quad w(0) = \xi.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung ist

$$k_1(s) = -s + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

und der Anfangswert liefert noch $c_1 = 0$, d.h.

$$k_1(s) = -s.$$

Bei der zweiten Gleichung erhalten wir die Lösung $k_2 \equiv 0$, falls $\xi = 0$. Im Falle $\xi \neq 0$ formen wir die Gleichung um zu $\frac{k_2'(s)}{k_2(s)^2} = 1$, und eine Integration beider Seiten führt dann auf

$$-\frac{1}{k_2(s)} = s + c_2 \iff k_2(s) = -\frac{1}{s + c_2}.$$

Setzen wir nun noch den Anfangswert ein, so folgt

$$k_2(0) = -\frac{1}{c_2} \overset{!}{=} \xi \qquad \iff \qquad c_2 = -\frac{1}{\xi},$$

d.h.

$$k_2(s) = -\frac{1}{s - \frac{1}{\xi}} = \frac{\xi}{1 - s\xi}.$$

Für w erhalten wir die Differentialgleichung $w'(s) = -\frac{s\xi^2}{(1-s\xi)^2} w(s)$ mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}
w(s) &= c_3 \exp\bigl(-\xi \textstyle\int \frac{s\xi - 1 + 1}{(s\xi - 1)^2} \, \mathrm{d}s\bigr) = c_3 \exp\bigl(-\xi \textstyle\int \frac{1}{s\xi - 1} + \frac{1}{(s\xi-1)^2} \, \mathrm{d}s\bigr) \\
&= c_3 \exp\bigl(-\ln(s\xi - 1) + \tfrac{1}{s\xi - 1}\bigr) = c_3 \tfrac{1}{s\xi - 1} \exp\bigl(\tfrac{1}{s\xi-1}\bigr), \quad c_3 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Mit dem Anfangswert folgt hier $w(0) = -c_3 e^{-1} \overset{!}{=} \xi \iff c_3 = -e\xi$ und damit

$$w(s) = -\xi \tfrac{1}{s\xi - 1} \exp\bigl(1 + \tfrac{1}{s\xi-1}\bigr).$$

Für die Grundcharakteristiken gilt nun

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} &\iff s = -x,\ \frac{1}{\frac{1}{\xi} + x} = t \\ &\iff s = -x,\ \xi = \frac{t}{1 - xt}.\end{aligned}$$

Damit folgt $\frac{1}{s\xi - 1} = -(1 - xt)$. Setzen wir dies ein, so erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = -\frac{t}{1-xt}\bigl(-(1-xt)\bigr)\exp\bigl(1 - (1-xt)\bigr) = te^{xt}.$$

<u>Skizze:</u>

Für die Grundcharakteristiken haben wir für festes $\xi \in \mathbb{R}$ nach obiger Rechnung den folgenden Zusammenhang zwischen t und x:

$$\begin{aligned} t &= 0 \quad \text{falls } \xi = 0, \\ t &= \frac{1}{x + \frac{1}{\xi}} \quad \text{falls } \xi \neq 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten also z.B. für $\xi = -2, 0, 2$ das folgende Bild: