Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

PD Dr. Peer C. Kunstmann
Dr. Andreas Müller-Rettkowski

Herbst 2014
23.09.2014

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 [10 Punkte]

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = 2x + \frac{3}{4}\int_1^x \frac{y(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t, \qquad y(1) = 1.$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst eine Differentialgleichung zweiter Ordunung, derer y genügt.

Lösung: Durch Einsetzen von $x = 1$ in die Gleichung erhält man einen weiteren Anfangswert $y'(1) = 2$. Ableiten der Gleichung liefert dann $y''(x) = 2 + \frac{3}{4}\frac{y(x)}{x^2}$; das Anfangswertproblem lässt sich also auch in Form einer inhomogenen Euler-DGL mit Anfangswerten ausdrücken,

$$x^2y'' - \frac{3}{4}y = 2x^2, \quad y'(1) = 2, \quad y(1) = 1.$$

Schritt 1: Lösungsraum der homogenen DGL $x^2y'' - \frac{3}{4}y = 0$.

Mit dem Ansatz $y(x) = x^\rho$ erhält man eingesetzt in die DGL

$$x^2\rho(\rho-1)x^{\rho-2} - \frac{3}{4}x^\rho = 0$$

und Koeffizientenvergleich liefert $\rho(\rho-1) - \frac{3}{4} = 0$ mit den beiden Lösungen $\rho_1 = \frac{3}{2}$ und $\rho_2 = -\frac{1}{2}$.

Damit sind $y_1(x) = x^{3/2}$ und $y_2(x) = x^{-1/2}$ zwei linear unabhängige Fundamentallösungen der homogenen DGL.

Schritt 2: Partikulärlösung der inhomogenen DGL $x^2y'' - \frac{3}{4}y = 2x^2$.

Aufgrund der speziellen Form der Inhomogenität und da x^2, y_1, y_2 linear unabhängig sind, bietet sich ein Ansatz der Form $y_p(x) = \alpha x^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, an. Einsetzen in die DGL liefert

$$2\alpha^2 - \frac{3}{4}\alpha x^2 = 2x^2$$

und damit $\alpha = \frac{8}{5}$.

Es folgt also, dass der Lösungsraum obiger Euler-DGL gegeben ist durch

$$\mathscr{L} = \operatorname{lin}\{x^{3/2}, x^{-1/2}\} + \frac{8}{5}x^2$$

bzw. $y(x) = ax^{3/2} + bx^{-1/2} + \frac{8}{5}x^2$, $a, b \in \mathbb{C}$.

Aus den Anfangsbedingungen erhält man

$$
\begin{aligned}
y(1) &= a + b + \frac{8}{5} = 1 \\
y'(1) &= \frac{3}{2}a - \frac{1}{2}b + \frac{16}{5} = 2
\end{aligned}
$$

mit der Lösung $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{3}{20}$.

Insgesamt löst also

$$
y(x) = -\frac{3}{4}x^{3/2} + \frac{3}{20}x^{-1/2} + \frac{8}{5}x^2
$$

das vorliegende Anfangswertproblem.

Aufgabe 2 [4+6=10 Punkte]

Betrachtet werde das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + y' + e^{-2x}y &= e^{-3x} \\ y(\ln \tfrac{2}{\pi}) &= 0 \\ y'(\ln \tfrac{2}{\pi}) &= -\tfrac{\pi}{2} \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Es sei $t = e^{-x}$. Welchem Anfangswertproblem genügt die durch $y(x) = u(e^{-x})$ definierte Funktion $u = u(t)$?

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem (1).

LÖSUNG:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} y'(x) &= -u'(e^{-x})e^{-x} \\ y''(x) &= u''(e^{-x})e^{-2x} + e^{-x}u'(e^{-x}). \end{aligned}$$

Eingesetzt in die DGL liefert, dass

$$y''(x) + y'(x) + e^{-2x}y(x) = u''(e^{-x})e^{-2x} + e^{-2x}u(e^{-x}) = e^{-3x}$$

bzw. mit $t = e^{-x}$

$$t^2u''(t) + t^2u(t) = t^3 \quad \Leftrightarrow \quad u''(t) + u(t) = t$$

mit Anfangswerten $y(\ln \frac{2}{\pi}) = u(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $y'(\ln \frac{2}{\pi}) = -\frac{\pi}{2}u'(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$, also $u'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

(b) Der Lösungsraum der linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung für u ist gegeben durch

$$\mathscr{L}_h = \operatorname{lin}\{\sin t, \cos t\} = \operatorname{lin}\{e^{\mathrm{i}t}, e^{-\mathrm{i}t}\},$$

denn das charakteristische Polynom der DGL $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$ besitzt die beiden Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm\mathrm{i}$.

Für die inhomogene DGL mache man z.B. den Ansatz $u_p(t) = \alpha t$. Dann gilt $u_p'(t) = \alpha$, $u_p''(t) = 0$ und durch Einsetzen in die DGL liest man $\alpha = 1$ ab.

Damit ist die allgemeine Lösung der DGL

$$u(t) = \alpha \sin t + \beta \cos t + t$$

und aus den Anfangswerten erhält man

$$u(\tfrac{\pi}{2}) = \alpha + \tfrac{\pi}{2} = 0, \quad u'(\tfrac{\pi}{2}) = -\beta + 1 = 1$$

mit der Lösung $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, $\beta = 0$.

Insgesamt folgt $u(t) = -\frac{\pi}{2}\sin t + t$ und rücksubstituiert

$$y(x) = u(e^{-x}) = -\tfrac{\pi}{2}\sin e^{-x} + e^{-x}.$$

Aufgabe 3 [10 Punkte]

Finden Sie eine Funktion $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^3)$ mit

$$\begin{aligned} 2D_1u(x,y,z) + 3D_2u(x,y,z) + 4D_3u(x,y,z) &= 0 \\ u(x,y,0) &= e^{x+y}. \end{aligned}$$

LÖSUNG: Die DGL ist äquivalent zu $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \nabla v(x,y,z) = 0$. Definiert man neue Koordinaten (ξ, η, ζ) via

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} x &= 2\xi + \eta \\ y &= 3\xi + \zeta \\ z &= 4\xi \end{aligned} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{aligned} \xi &= \tfrac{z}{4} \\ \eta &= x - \tfrac{z}{2} \\ \zeta &= y - \tfrac{3z}{4} \end{aligned}$$

so gilt für $\tilde{v}(\xi, \eta, \zeta) = v\left(A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\right) = v(2\xi + \eta, 3\xi + \zeta, 4\xi)$

$$D_1\tilde{v}(\xi,\eta,\zeta) = 2D_1v(2\xi+\eta, 3\xi+\zeta, 4\xi) + 3D_2v(2\xi+\eta, 3\xi+\zeta, 4\xi) + 4D_3v(2\xi+\eta, 3\xi+\zeta, 4\xi).$$

Aus der Differentialgleichung für v liest man ab

$$D_1\tilde{v}(\xi,\eta,\zeta) = 0$$

und somit $\tilde{v}(\xi,\eta,\zeta) = f(\eta,\zeta)$ mit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ beliebig. Dann gilt aber

$$v(x,y,z) = \tilde{v}\left(\tfrac{z}{4}, x - \tfrac{z}{2}, y - \tfrac{3z}{4}\right) = f\left(x - \tfrac{z}{2}, y - \tfrac{3z}{4}\right).$$

Aus den Randbedingungen folgt $v(x,y,0) = f(x,y) = e^{x+y}$ und damit

$$v(x,y,z) = f\left(x - \tfrac{z}{2}, y - \tfrac{3z}{4}\right) = e^{x+y-\frac{5z}{4}}.$$

Aufgabe 4 [4+2+4 = 10 Punkte]

(a) Berechnen Sie $A \in \mathbb{C}^{(3,3)}$, sodass

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^t \cos t & 0 & \mathrm{i}e^t \sin t \\ 0 & e^t & 0 \\ \mathrm{i}e^t \sin t & 0 & e^t \cos t \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{\vec{x}}(t) = A\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix A aus (a).

(c) Sei $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie

$$\sin(tB) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1}.$$

Drücken Sie das Ergebnis in möglichst geschlossener Form durch elementare Funktionen aus.

Lösung:

(a) Es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA} = Ae^{tA} \quad \text{und damit} \quad A = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA}\right) e^{-tA} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{tA}\right|_{t=0}.$$

Eingesetzt erhält man also

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} e^t(\cos t - \sin t) & 0 & \mathrm{i}e^t(\sin t + \cos t) \\ 0 & e^t & 0 \\ \mathrm{i}e^t(\sin t + \cos t) & 0 & e^t(\cos t - \sin t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \cos t & 0 & -\mathrm{i}e^{-t} \sin t \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ -\mathrm{i}e^{-t} \sin t & 0 & e^{-t} \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 t - \sin t \cos t + \sin^2 t + \sin t \cos t & 0 & -\mathrm{i} \cos t \sin t + \mathrm{i} \sin^2 t + \mathrm{i} \cos t \sin t + \mathrm{i} \cos^2 t \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} \sin t \cos t + \mathrm{i} \cos^2 t - \mathrm{i} \sin t \cos t + \mathrm{i} \sin^2 t & 0 & \sin^2 t + \cos t \sin t + \cos^2 t - \cos t \sin t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) Die Lösung des Differentialgleichungssystems ist

$$\vec{x}(t) = e^{tA}\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} e^t \cos t & 0 & \mathrm{i}e^t \sin t \\ 0 & e^t & 0 \\ \mathrm{i}e^t \sin t & 0 & e^t \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t(\cos t + \mathrm{i} \sin t) \\ e^t \\ e^t(\cos t + \mathrm{i} \sin t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{(1+\mathrm{i})t} \\ e^t \\ e^{(1+\mathrm{i})t} \end{pmatrix}.$$

(c) Induktiv zeigt man

$$B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 2^k \\ 2^{k+1} & 0 \end{pmatrix} = 2^k B.$$

Für $k = 0$ ist die Gleichheit offensichtlich, den Induktionsschritt $k \to k+1$ rechnet man mithilfe von $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ leicht nach

$$B^{2(k+1)+1} = B^{2k+3} = B^2 B^{2k+1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2^k \\ 2^{k+1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2^{k+1} \\ 2^{k+2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\sin(tB) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 2^k \\ 2^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} 2^k \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} 2^{k+1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \sqrt{2}^{2k} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \sqrt{2}^{2k+2} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \sqrt{2}^{2k+1} \\ \sqrt{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)!} \sqrt{2}^{2k+1} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t\sqrt{2}) \\ \sqrt{2} \sin(t\sqrt{2}) & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(t\sqrt{2}) B.
\end{aligned}$$