

## HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

### BACHELOR-MODULPRÜFUNG

#### AUFGABE 1 (5+5=10 PUNKTE)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'' + xy' + y &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1,\end{aligned}$$

mit einem Potenzreihenansatz.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - y = e^x + \cos(x)$$

an.

*Hinweis:* Es gilt  $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

#### AUFGABE 2 (5+5=10 PUNKTE)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y' &= \frac{y}{x} - \frac{e^x}{2x}y^3, \quad x > 1 \\ y(1) &= 3.\end{aligned}$$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' - (1 + 2x)y' + (1 + x)y = 0$$

an. Finden Sie im Anschluss die Lösung mit den Anfangswerten  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 2e$ .

*Hinweis:* Eine erste Lösung ist durch die Funktion  $y_1(x) = e^x$  gegeben.

**AUFGABE 3 (7+3=10 PUNKTE)**

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom  $p_A(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2$  für alle  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

- a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem des Systems

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

an.

- b) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} v'' &= -3v + 3w, \\ w'' &= v - w. \end{aligned}$$

in das System aus a) und finden Sie so dessen allgemeine reelle Lösung.

**AUFGABE 4 (8+2=10 PUNKTE)**

- a) Geben Sie alle Funktionen  $u : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in (0, 2\pi), t \in \mathbb{R},$$

an, die die Form  $u(x, t) = v(x)w(t)$  besitzen und die

$$u(0, t) = u(2\pi, t), \quad u_x(0, t) = u_x(2\pi, t),$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$  erfüllen.

- b) Finden Sie nun die eindeutige Funktion  $u$ , die zusätzlich

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

für alle  $x \in [0, 2\pi]$  erfüllt.

# VIEL ERFOLG!

**Hinweise für nach der Klausur:**

- Die **Ergebnisse** der Modulprüfung werden am Montag, den **17.10.2016**, neben Zimmer 2.027 (Geb. 20.30) und unter [www.math.kit.edu/iana1](http://www.math.kit.edu/iana1) veröffentlicht.
- Die **Einsichtnahme** in die korrigierten Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **20.10.2016**, von **16 bis 18 Uhr** im Hörsaal **Neue Chemie (Geb. 30.46)** statt.
- Die **mündlichen Nachprüfungen** finden in der Woche vom **24.10.2016** bis **28.10.2016** statt.