Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. Ioannis Anapolitanos

SS 2016
20.09.2016

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + xy' + y &= 0, \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 1, \end{aligned}$$

mit einem Potenzreihenansatz.

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - y = \mathrm{e}^x + \cos(x)$$

an.
Hinweis: Es gilt $\lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lösungsvorschlag

a) Wir machen den Ansatz (Entwicklungspunkt $x_0 = 0$)

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{für } (a_n)_n \subseteq \mathbb{C}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} y(0) &= a_0 = 0 \qquad \text{und} \\ y'(0) &= a_1 = 1 \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{und} \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} &\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + n a_n x^n + a_n x^n = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &(n+2)(n+1)a_{n+2} + (n+1)a_n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

Damit ist

$$a_{n+2} = -\frac{1}{n+2}a_n.$$

Da $a_0 = 0$ folgt hieraus $a_2 = a_4 = ... = a_{2k} = 0$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$. Für ungerade n erhalten wir

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{3} \\ a_5 &= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} \\ a_7 &= -\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad a_{2k+1} = (-1)^k \prod_{l=0}^{k} \frac{1}{2l+1} = (-1)^k \cdot \frac{1}{3}\cdot ... \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{2\cdot 4 \cdot ... \cdot 2k}{2\cdot 4\cdot ... \cdot 2k} = (-1)^k \cdot \frac{2^k k!}{(2k+1)!}$$

Damit erhalten wir als Lösung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\prod_{l=0}^{k} \frac{1}{2l+1} \right) x^{2k+1}.$$

b) Wir machden den Ansatz $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Für die zugehörige homogene DGL folgt nun

$$(\lambda^3 - 1)\mathrm{e}^{\lambda x} = 0,$$

d.h. wir erhalten das charakteristische Polynom

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1) \\ &= (\lambda - 1)\left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGL:

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1 \mathrm{e}^x + c_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Für die partikuläre Lösung machen wir einen Ansatz vom Typ der rechten Seite:

$$\begin{aligned} y_p(x) &= axe^x + b\cos(x) + c\sin(x) \\ \Rightarrow \quad y_p'(x) &= ae^x + axe^x - b\sin(x) + c\cos(x) \\ y_p''(x) &= 2ae^x + axe^x - b\cos(x) - c\sin(x) \\ y_p'''(x) &= 3ae^x + axe^x + b\sin(x) - c\cos(x) \end{aligned}$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} y_p'''(x) - y_p(x) &= 3ae^x + (-b-c)\cos(x) + (b-c)\sin(x) \stackrel{!}{=} e^x + \cos(x) \\ \underset{\text{vergleich}}{\overset{\text{Koeffizienten-}}{\Rightarrow}} \quad & a = \frac{1}{3}, \quad -b-c = 1, \quad b-c = 0 \\ \text{d.h.} \quad & a = \frac{1}{3}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL lautet also

$$y(x) = \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{2}\sin(x) + c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{1}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_3 e^{-\frac{1}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y' &= \frac{y}{x} - \frac{e^x}{2x}y^3, \quad x > 1 \\ y(1) &= 3. \end{aligned}$$

b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy'' - (1+2x)y' + (1+x)y = 0$$

an. Finden Sie im Anschluss die Lösung mit den Anfangswerten $y(1) = 0$, $y'(1) = 2e$.
Hinweis: Eine erste Lösung ist durch die Funktion $y_1(x) = e^x$ gegeben.

Lösungsvorschlag

a) Hierbei handelt es sich um eine Bernoulli-DGL (mit $\alpha = 3$).

Wir substituieren

$$z(x) := y(x)^{-2} \qquad (y(x) = z(x)^{-\frac{1}{2}})$$

Einsetzen liefert die inhomogene DGL. 1. Ordnung

$$z'(x) = -2 \cdot \frac{1}{x} z(x) + 2\frac{e^x}{2x}$$

Für die zugehörigen homogene Gleichung erhalten wir

$$z_{\text{hom}}(x) = c \cdot \exp\left(\int^x -\frac{2}{y}\,\mathrm{d}y\right) = c \cdot \exp(-2\ln(x)) = cx^{-2}$$

Mit der Wahl $z_{\mathrm{p}}(x) = c(x) \cdot x^{-2}$ folgt durch Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & c'(x)x^{-2} - 2c(x)x^{-3} = -2c(x)x^{-3} + \frac{\mathrm{e}^x}{x} \\
\Leftrightarrow \qquad & c'(x) = x\mathrm{e}^x \\
\Rightarrow \qquad & c(x) = \int_0^x y\mathrm{e}^y \mathrm{d}y = -\int_0^x \mathrm{e}^y \mathrm{d}y + [y\mathrm{e}^y]_0^y = x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x \\
\Rightarrow \qquad & z_{\mathrm{p}}(x) = \frac{1}{x}\mathrm{e}^x - \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^x \\
\Rightarrow \qquad & z(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x + c\frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Rücksubstitution ergibt:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x + c\frac{1}{x^2}}}.$$

Mit $y(1) = \frac{1}{\sqrt{c}} = 3$ folgt $c = \frac{1}{9}$ und damit

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^x + \frac{1}{9}\frac{1}{x^2}}} = \frac{3x}{\sqrt{9(x-1)\mathrm{e}^x + 1}}.$$

b) Es ist $y_1(x) = \mathrm{e}^x$ eine Lösung dieser Gleichung, denn

$$x\mathrm{e}^x - (1+2x)\mathrm{e}^x + (1+x)\mathrm{e}^x = 0$$

Wir machen nun den Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$ (Reduktionsverfahren von d'Alembert)

$$\begin{aligned}
y' &= v'y_1 + vy_1' \\
y'' &= v''y_1 + vy_1'' + 2v'y_1'
\end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned}
xy'' - (1+2x)y' + (1+x)y &= xv''\mathrm{e}^x + 2xv'\mathrm{e}^x + xv\mathrm{e}^x - (1+2x)v'\mathrm{e}^x - (1+2x)v\mathrm{e}^x + (1+x)v\mathrm{e}^x \\
&= xv''\mathrm{e}^x - v'\mathrm{e}^x = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad xv'' - v' = 0 &
\end{aligned}$$

Für $u = v'$ folgt

$$\begin{aligned}
& u' = \frac{1}{x}u \\
\Rightarrow \qquad & u(x) = cx \\
\Rightarrow \qquad & v(x) = c_1x^2 + c_2
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_1 x^2 e^x + c_2 e^x$$

Mit $y(1) = c_1 e + c_2 e = 0$ ergibt sich $c_1 = -c_2 (*)$ und mit $y'(1) = 2c_1 e + c_1 e + c_2 e = 3c_1 e + c_2 e \overset{(*)}{=} 2c_1 e = 2e$ folgt $c_1 = 1$ und $c_2 = -1$, also

$$y(x) = x^2 e^x - e^x$$

Aufgabe 3 (7+3=10 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit dem charakteristischen Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^4 + 4\lambda^2$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

a) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem des Systems

$$\vec{y}' = A\vec{y}$$

an.

b) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} v'' &= -3v + 3w, \\ w'' &= v - w. \end{aligned}$$

in das System aus **a)** und finden Sie so dessen allgemeine reelle Lösung.

Lösungsvorschlag

a) Das charakteristische Polynom liefert die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2i$ und $\lambda_3 = -2i$. Wir berechnen die zugehörigen Eigenräume:

$$E_A(0) = \mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_A(2i) = \mathrm{Kern}(2iI - A) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 2i & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2i & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2i & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 2i \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2i \\ 0 & 2i & 0 & 6i \\ 0 & -1 & 2i & -4 \\ 0 & 0 & 2i & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2i \\ 0 & 1 & -2i & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & -1 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2i \\ 0 & 1 & -2i & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}i \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} -3i \\ 6 \\ i \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$$

$$E_A(-2\mathrm{i}) = \mathrm{Kern}(-2\mathrm{i}I - A) = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 3\mathrm{i} \\ 6 \\ -\mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix}\right\} \tag{1}$$

Da der Eigenraum zu $\lambda_1 = 0$ eindimensional ist, ergänzen wir den Basisvektor aus dem Eigenraum mit Hauptvektoren. Dafür bestimmen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(A^2) &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir den Hauptvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Das Fundamentalsystem ist daher gegeben durch

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\varphi_2(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + tA\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \\
\tilde{\varphi}_3(t) &= \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}\begin{pmatrix} -3\mathrm{i} \\ 6 \\ \mathrm{i} \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\sin(2t) - 3\mathrm{i}\cos(2t) \\ 6\cos(2t) + 6\mathrm{i}\sin(2t) \\ -\sin(2t) + \mathrm{i}\cos(2t) \\ -2\cos(2t) - 2\mathrm{i}\sin(2t) \end{pmatrix} \\
\tilde{\varphi}_4(t) &= \overline{\tilde{\varphi}_3(t)} \\
\Rightarrow \qquad \varphi_3(t) &= \begin{pmatrix} 3\sin(2t) \\ 6\cos(2t) \\ -\sin(2t) \\ -2\cos(2t) \end{pmatrix} \qquad \varphi_4(t) = \begin{pmatrix} -3\cos(2t) \\ 6\sin(2t) \\ \cos(2t) \\ -2\sin(2t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) + c_4\varphi_4(t).$$

b) Setze $y_1 = v$, $y_2 = v'$, $y_3 = w$ und $y_4 = w'$. Damit folgt

$$y' = \begin{pmatrix} v' \\ v'' \\ w' \\ w'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ -3y_1 + 3y_3 \\ y_4 \\ y_1 - y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Mit der Lösung von **a)** folgt für $(v, w) = (y_1, y_3)$

$$\begin{aligned} v(t) &= c_1 + c_2 t + 3c_3 \sin(2t) - 3c_4 \cos(2t) \qquad \text{und} \\ w(t) &= c_1 + c_2 t - c_3 \sin(2t) + c_4 \cos(2t). \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (8+2=10 Punkte)

a) Geben Sie alle Funktionen $u : [0, 2\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0, 2\pi), t \in \mathbb{R},$$

an, die die Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ besitzen und die

$$u(0,t) = u(2\pi, t), \qquad u_x(0,t) = u_x(2\pi, t),$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ erfüllen.

b) Finden Sie nun die eindeutige Funktion u, die zusätzlich

$$u(x, 0) = u_t(x, 0) = \cos(x - \frac{\pi}{4})$$

für alle $x \in [0, 2\pi]$ erfüllt.

Lösungsvorschlag

a) Die Nullfunktion ist offensichtlich eine Lösung. Sei nun $u \neq 0$. Wir machen den Produktansatz

$$\begin{aligned} & u(x,t) = v(x)w(t) \quad \text{mit} \quad v, w \neq 0 \\ \Rightarrow \quad & w''(t)v(x) = v''(x)w(t) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w''(t)}{w(t)} = c \qquad \forall x, t \text{ und ein } c \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad & v''(x) = cv(x), \quad w''(t) = cw(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{1. Fall}}: c > 0\\
&\quad\Rightarrow \quad v(x) = \alpha_1 \mathrm{e}^{\sqrt{c}x} + \alpha_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{c}x}\\
&\quad \quad w(t) = \beta_1 \mathrm{e}^{\sqrt{c}t} + \beta_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{c}t}\\
&\underline{\text{2. Fall}}: c = 0\\
&\quad\Rightarrow \quad v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x\\
&\quad \quad w(t) = \beta_1 + \beta_2 t\\
&\underline{\text{3. Fall}}: c < 0\\
&\quad\Rightarrow \quad v(x) = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{|c|}x\right) + \alpha_2 \sin\left(\sqrt{|c|}x\right)\\
&\quad \quad w(t) = \beta_1 \cos\left(\sqrt{|c|}t\right) + \beta_2 \sin\left(\sqrt{|c|}t\right)
\end{aligned}$$

Nun gilt weiter

$$\begin{aligned}
u(0,t) = u(2\pi,t) &\Leftrightarrow v(0)w(t) = v(2\pi)w(t)\\
&\overset{w\neq 0}{\Leftrightarrow} v(0) = v(2\pi)\\
u_x(0,t) = u_x(2\pi,t) &\Leftrightarrow v'(0) = v'(2\pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\text{1. Fall}}: c > 0\\
&\quad\Rightarrow \quad v(0) = v(2\pi) \Leftrightarrow \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 \mathrm{e}^{\sqrt{c}2\pi} + \alpha_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{c}2\pi}\\
&\quad \quad v'(0) = v'(2\pi) \Leftrightarrow \sqrt{c}\alpha_1 - \sqrt{c}\alpha_2 = \sqrt{c}\alpha_1 \mathrm{e}^{\sqrt{c}2\pi} - \sqrt{c}\alpha_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{c}2\pi}\\
&\quad \alpha_1 - \alpha_2 = \alpha_1 \mathrm{e}^{\sqrt{c}2\pi} - \alpha_2 \mathrm{e}^{-\sqrt{c}2\pi}\\
&\quad\Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_1 \mathrm{e}^{\sqrt{c}2\pi}\\
&\quad\overset{c>0}{\Rightarrow} \quad \alpha_1 = 0 \quad , \quad \text{Analog:} \quad \alpha_2 = 0\\
&\quad\quad\Rightarrow \quad v = 0 \Rightarrow \quad \text{Widerspruch}\\
&\underline{\text{2. Fall}}: c = 0\\
&\quad\Rightarrow \quad v(0) = \alpha_1 = \alpha_1 + 2\pi\alpha_2 = v(2\pi)\\
&\quad\quad\quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 0\\
&\quad\quad\quad \Rightarrow \quad \text{v ist konstant}\\
&\quad \Rightarrow u(x,t) = \beta_1 + \beta_2 t \quad , \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\\
&\underline{\text{3. Fall}}: c < 0\\
&\quad\Rightarrow \quad v(0) = v(2\pi) \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_1 \cos\left(\sqrt{|c|}2\pi\right) + \alpha_2 \sin\left(\sqrt{|c|}2\pi\right)\\
&\quad \quad v'(0) = v'(2\pi) \Leftrightarrow \alpha_2 = \alpha_2 \cos\left(\sqrt{|c|}2\pi\right) - \alpha_2 \sin\left(\sqrt{|c|}2\pi\right)\\
&\quad\quad\quad \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \left(\cos\left(\sqrt{|c|}2\pi\right) - 1\right) + \alpha_2 \sin\left(\sqrt{|c|}2\pi\right) = 0\\ -\alpha_1 \sin\left(\sqrt{|c|}2\pi\right) + \alpha_2 \left(\cos\left(\sqrt{|c|}2\pi\right) - 1\right) = 0 \end{cases}\\
&\quad\quad\quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \cos\left(2\pi\sqrt{|c|}\right) - 1 & \sin\left(2\pi\sqrt{|c|}\right)\\ -\sin\left(2\pi\sqrt{|c|}\right) & \cos\left(2\pi\sqrt{|c|}\right) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dieses LGS nur dann nicht-triviale Lösungen hat, wenn die Determinante der Matrix 0 ist, also

$$\begin{aligned} & \left(\cos\left(2\pi\sqrt{|c|}\right)-1\right)^2+\sin^2\left(2\pi\sqrt{|c|}\right)=0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sin\left(2\pi\sqrt{|c|}\right)=0 \quad , \quad \cos\left(2\pi\sqrt{|c|}\right)=1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\pi\sqrt{|c|}=2\pi k \quad \Leftrightarrow \quad \underline{c=-k^2} \end{aligned}$$

Alle möglichen Lösungen sind also $u_0(x,t)=C_1+C_2t$ sowie

$$\begin{aligned} u_k(x,t)=v_k(x)w_k(t) &= C_1\cos(kx)\cos(kt)+C_2\sin(kx)\sin(kt) \\ &\quad + C_3\cos(kx)\sin(kt)+C_4\sin(kx)\cos(kt) \quad , \quad k\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(x-\frac{\pi}{4}) &= \cos(x)\underbrace{\cos(-\frac{\pi}{4})}_{=\frac{\sqrt{2}}{2}}-\sin(x)\underbrace{\sin(-\frac{\pi}{4})}_{=-\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos(x)+\sin(x)). \end{aligned}$$

Für die allgemeinen Lösungen gilt (wir bemerken, dass u_0 konstant in x ist und deshalb nicht in Frage kommt)

$$\begin{aligned} u_k(x,0) &= C_1\cos(kx)+C_4\sin(kx) \\ u_{k,t}(x,0) &= C_3k\cos(kx)+C_2k\sin(kx) \end{aligned}$$

Damit gilt die Forderung für $k=1$, $C_1=C_2=C_3=C_4=\frac{\sqrt{2}}{2}$ und die Lösung lautet

$$u(x,t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin(kx)+\cos(kx))(\sin(kt)+\cos(kt)).$$