Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung zu Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik Sommersemester 2017

19.09.2017

Aufgabe 1 (5+5=10 Punkte)**:**

(i) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' - \cos x\ y + \frac{\cos x}{y^2} = 0, \quad y(\pi) = 0.$$

(ii) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + \left(\frac{2x}{x^2+1} - 4x(x^2+1)\right) y + 2x(x^2+1)e^{x^2} y^2 = -2x\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}e^{-x^2}, \quad y(0) = 2.$$

Hinweis: e^{-x^2} ist eine Lösung der Differentialgleichung.

Lösung:

(i) Es handelt sich um eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit $\alpha = -2$, $g(x) = -\cos x$ und $h(x) = \cos x$. Multiplizieren der Gleichung mit $3y^2$ führt auf die Differentialgleichung

$$z' = 3\cos x\ z - 3\cos x \tag{1}$$

für $z := y^3$. Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$z_h(x) = c\exp\left(\int 3\cos x\ dx\right) = ce^{3\sin x} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Variation der Konstanten liefert die spezielle Lösung $z_p(x) = 1$ und somit ist $z(x) = 1 + ce^{3\sin x}$ ($c \in \mathbb{R}$) die allgemeine Lösung von (1). Rücktransformation liefert schließlich die allgemeine Lösung

$$y(x) = \sqrt[3]{z(x)} = \sqrt[3]{1 + ce^{3\sin x}} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Anpassen der Konstanten c an die Anfangsbedingung ergibt $c = -1$, also ist

$$y(x) = \sqrt[3]{1 - e^{3\sin x}}$$

die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems.

(ii) Es handelt sich um eine Riccati'sche Differentialgleichung mit $g(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 4x(x^2+1)$, $h(x) = 2x(x^2+1)e^{x^2}$ und $k(x) = -2x\frac{x^4+3x^2+1}{x^2+1}e^{-x^2}$. Der Ansatz $u := y - e^{-x^2}$ führt auf die folgende Differentialgleichung für u, bzw $z := u^{-1}$:

$$u' + \frac{2x}{x^2+1}u + 2x(x^2+1)e^{x^2}u^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad z' = \frac{2x}{x^2+1}z + 2x(x^2+1)e^{x^2}.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$u(x) = \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{(c + e^{x^2})(x^2+1)} \quad (c \in \mathbb{R})$$

und die Lösung der gegeben Differentialgleichung ist

$$y(x) = u(x) + e^{-x^2} = \frac{1}{(c + e^{x^2})(x^2+1)} + e^{-x^2} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

Einsetzen des Anfangswertes ergibt schließlich $c = 0$, also lautet die gesuchte Lösung des Anfangswertproblems

$$y(x) = \frac{1}{e^{x^2}(x^2+1)} + e^{-x^2} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (6+4=10 Punkte)**:**

(i) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\left(\frac{\cos x}{x} e^{\sin x} + 2\sin y\right)\ dx + x\cos y\ dy = 0$$

nicht exakt ist. Bestimmen Sie weiter einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x)$ und berechnen Sie die allgemeine Lösung in impliziter Form.

(ii) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''' - 3y' + 2y = 12e^x.$$

Hinweis: -2 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen Gleichung.

Lösung:

(i) Setze $P(x,y) := \frac{\cos x}{x} e^{\sin x} + 2\sin y$ und $Q(x,y) = x\cos y$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt $P_y(x,y) = 2\cos y \neq \cos y = Q_x(x,y)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, also ist die Differentialgleichung nicht exakt. Der Ansatz

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x,y) &= \mu(x)P(x,y) = \mu(x)\left(\frac{\cos x}{x} e^{\sin x} + 2\sin y\right), \\ \tilde{Q}(x,y) &= \mu(x)Q(x,y) = \mu(x)x\cos y \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

liefert für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_y(x,y) &= \mu(x)2\cos y + 0, \\ \tilde{Q}_x(x,y) &= \mu'(x)x\cos y + \mu(x)\cos y. \end{aligned}$$

Gleichsetzen ergibt

$$\mu'(x)x\cos y = \mu(x)\cos y \quad \Leftrightarrow \quad x\mu'(x) = \mu(x),$$

also $\mu(x) = x$. Damit ist die Differentialgleichung

$$\left(\cos x e^{\sin x} + 2x\sin y\right)\ dx + x^2\cos y\ dy = 0$$

äquivalent zur gegebenen und zudem exakt. Weiter berechnet man zum Vektorfeld $(\tilde{P}, \tilde{Q})$ eine Stammfunktion F mit $F(x,y) = e^{\sin x} + x^2 \sin y$ $((x,y) \in \mathbb{R}^2)$. Also ist die allgemeine Lösung in impliziter Form gegeben durch

$$c = F(x,y) = e^{\sin x} + x^2\sin(y(x)) \quad (c \in \mathbb{R}).$$

(ii) Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$. Damit ist

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-2x} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Der Ansatz $y_p(x) = ax^2e^x$ mit $a \in \mathbb{R}$ führt auf die spezielle Lösung $y_p(x) = 2x^2e^x$. Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$y(x) = 2x^2e^x + c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-2x} \quad (x \in \mathbb{R},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 (4+6=10 Punkte)**:**

(i) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem für

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot y$$

und bestimmen Sie die Wronski-Determinante dieses Fundamentalsystems.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \cdot y, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(i) Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - (2+i))(\lambda - (2-i))$. Weiter gilt

$$E_{2+i} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(Beachte: E_{2-i} wird nicht benötigt). Damit erhält man das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = \operatorname{Re}(e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}) = e^{2x} \operatorname{Re}([\cos x + i \sin x] \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}) = e^{2x} \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \cos x \end{pmatrix},$$

$$y_2(x) = \operatorname{Im}(e^{(2+i)x} \begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \end{pmatrix}) = e^{2x} \begin{pmatrix} \sin x - \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}.$$

Die Wronski-Determinante ist also gegeben durch

$$w(x) = e^{4x} ([\cos x + \sin x] \sin x - [\sin x - \cos x] \cos x) = e^{4x}.$$

(ii) Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = (1+\lambda)^2(2-\lambda)$, d.h. A besitzt die Eigenwerte -1 und 2 mit den Eigenräumen

$$E_{-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad E_2 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit erhält man das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$y_2(x) = e^{-x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$y_3(x) = e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist daher durch

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$$

gegeben. Einsetzen in die Anfangsbedingungen ergibt $c_1 = 1$, $c_2 = 0$ und $c_3 = 1$, also

$$y(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-x} + e^{2x} \\ 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 4 (6+4=10 Punkte)**:**

(i) Berechnen Sie eine Lösung des Problems

$$\begin{cases} u_t(x,t) + u_x(x,t) + (\frac{1}{t} - \cos x)u(x,t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ t > 0), \\ u(x,1) = e^{\sin x} \quad (x \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes.

(ii) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_t(x,t) - 2u_x(x,t) = (x - 2t)e^{xt} \quad ((x,t) \in \mathbb{R}), \\ u(x,0) = \log(\cosh x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{cases}$$

Lösung:

(i) Der Separationsansatz $u(x,t) = v(x)g(t)$ $(x \in \mathbb{R},\ t > 0)$ liefert

$$v(x)g'(t) + v'(x)g(t) + \left(\frac{1}{t} - \cos x\right) v(x)g(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{g'(t)}{g(t)} + \frac{1}{t} = -\frac{v''(x)}{v(x)} + \cos x = \text{const} =: \lambda \in \mathbb{R}.$$

Damit ergeben sich die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} g'(t) &= (\lambda - \tfrac{1}{t})g(t) \\ v'(x) &= (\cos x - \lambda)v(x) \end{aligned}$$

Man erhält also die Lösungen

$$g(t) = c_1 \exp\left(\int \left(\lambda - \frac{1}{t}\right) dt\right) = c_1 \frac{1}{t} e^{\lambda t}$$

und

$$v(x) = c_2 \exp\left(\int (\cos x - \lambda) dx\right) = c_2 e^{\sin x - \lambda x}.$$

Einsetzen in die Anfangsbedingung ergibt $c_1 c_2 = 1$ und $\lambda = 0$ und somit

$$u(x,t) = v(x)g(t) = \tfrac{1}{t} e^{\sin x} \quad ((x \in \mathbb{R},\ t > 0)).$$

(ii) Es handelt sich um eine Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten, d.h. $g(x,t) = (x - 2t)e^{xt}$, $f(x) = \log(\cosh x)$ und $a = -2$. Die Lösung ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= f(x - at) + \int_0^t \underbrace{g(x - a(t-s), s)}_{=(x+2t-4s)e^{(x+2t)s-2s^2}} \, ds \\ &= \log(\cosh(x + 2t)) + \left[e^{(x+2t)s-2s^2}\right]_{s=0}^t \\ &= \log(\cosh(x + 2t)) + e^{xt} - 1 \quad ((x,t) \in \mathbb{R}^2). \end{aligned}$$