Institut für Analysis
Arbeitsgruppe Angewandte Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

SS2018
10.09.2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1: (5 + (3 + 2) = 10 Punkte)

(a) Lösen sie das folgende Anfangswertproblem

$$y' + (1-2x)y + (x-1)y^2 = -x \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = 2.$$

Hinweis: Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung ist leicht zu erraten.

(b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(y')^2 + 4xy' - 4y = 0 \quad (x \in \mathbb{R}), \qquad y(0) = y_0.$$

(i) Bestimmen Sie möglichst viele Lösungen der obigen Differentialgleichung in expliziter Form $y = y(x)$.

(ii) Zeigen Sie, dass für $y_0 \geq 0$ das obige Anfangswertproblem mindestens eine Lösung besitzt. Für welche $y_0 \geq 0$ ist das Anfangswertproblem eindeutig lösbar?

Aufgabe 2: (1 + 4 + 3 + 2 = 10 Punkte)
Auf der Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, x > 0, \, y > 0\}$ sei die Differentialgleichung

$$y(x+y)\,\mathrm{d}x - x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Bestimmen Sie einen Eulerschen Multiplikator $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Form $\mu(x, y) = \nu(xy^\alpha)$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Geben Sie die Lösungen der obigen Differentialgleichung in impliziter Form an.

(d) Bestimmen Sie diejenige Lösung, die $y(e) = -e$ erfüllt in expliziter Form $y = y(x)$ und geben Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung an.

— Bitte wenden! —

Aufgabe 3: (7 + 2 + 1 = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie ein Fundamentalsystem Φ für $\vec{y}' = A\vec{y}$ und e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = A\vec{y} - t\vec{v} & t \in \mathbb{R}, \\ \vec{y}(0) = \vec{v}, \end{cases} \qquad \text{wobei} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und A wie im vorhergehenden Aufgabenteil.

(c) Formulieren Sie die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung ($\gamma, \omega_0 \geq 0$ konstant)

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

in ein System linearer Differentialgleichungen erster Ordnung um.

Aufgabe 4: (5 + 5 = 10 Punkte)
Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \dfrac{2x}{1+t} u_x + u_t = -tu & (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u(x,0) = x^2 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(a) mit dem Charakteristikenverfahren bzw.

(b) durch den Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

- Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **15.10.2018** im Internet, sowie durch Aushang am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 des Gebäudes 20.30 bekannt gegeben.
- Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **18.10.2018**, zwischen **16:00** und **18:00** im Hörsaal der neuen Chemie statt.
- Mündliche Nachprüfungen finden zwischen Montag, den **22.10.** und Freitag, den **26.10.2018** im Gebäude 20.30 statt.