09.09.2019
PD Dr. Peer Kunstmann

Höhere Mathematik III für Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (12 + 8 = 20 Punkte)

(a) Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x^2y'' + 3xy' - 15y &= 0, \\ y(1) &= 0, \\ y'(1) &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Typ und die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ und geben Sie anschließend die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblemes an.

(b) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' - 2y &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie ihre Lösung.

Aufgabe 2 (4 + 7 + 9 = 20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$-2xy\mathrm{d}x + \left(3x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y = 0, \ \ x(1) = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Finden Sie einen Eulerschen Multiplikator $\eta = \eta(y)$, der nur von y abhängig ist.

(c) Bestimmen Sie explizit die Lösung $x = x(y)$ des obigen Anfangswertproblems. Geben Sie auch das maximale Existenzintervall dazu an.

— Bitte Wenden! —

Aufgabe 3 (10 + 2 + 8 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixexponentialfunktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

an.

(c) Machen Sie einen geeigneten partikulären Ansatz und bestimmen Sie so die Lösung des Anfangswertproblemes

$$y' = Ay + b, \; y(0) = y_0.$$

Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte)

(a) Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung mithilfe des Charakteristikenverfahrens

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) - \frac{1}{x^2}\partial_y u(x,y) &= u^2(x,y) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mithilfe eines Separationsansatzes der Form $u(t,x) = v(t)w(x)$ mit einer geeigneten Funktion w

$$\begin{aligned} 4\partial_t u(t,x) + \partial_{xx} u(t,x) - 3u(t,x) &= 0 \text{ auf } (0,\infty) \times (0,\pi), \\ u(0,x) &= \sin^3(x) \text{ für alle } x \in [0,\pi], \\ u(t,0) &= 0 = u(t,\pi) \text{ für alle } t \in [0,\infty). \end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Darstellung $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie damit $\sin^3(x)$.

Viel Erfolg!

Hinweise: Ergebnisse dieser Modulprüfung werden spätestens am Montag, den 14.10.2019 im Mathematik Gebäude (20.30) im zweiten Stock veröffentlicht.
Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den 17.10.2019 von 16.00 Uhr bis 18.00 Uhr statt.
Die mündlichen Nachprüfungen finden in der Woche vom 21.10.2019 bis 25.10.2019 statt. Genaueres wird sich online auf der Homepage der Vorlesung finden.