09.09.2019
PD Dr. Peer Kunstmann

# Höhere Mathematik III für Physik

## Bachelor-Modulprüfung

### Aufgabe 1 (12 + 8 = 20 Punkte)

(a) Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x^2y'' + 3xy' - 15y &= 0, \\ y(1) &= 0, \\ y'(1) &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Typ und die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ und geben Sie anschließend die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblemes an.

(b) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' - 2xy' - 2y &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie ihre Lösung.

### Lösung von Aufgabe 1

**Typ der Differentialgleichung**: Es handelt sich hierbei um eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten, genauer ist es von der Form her eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
**Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten**: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \\ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) &= v''(t) - v'(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + 3\mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) - 15y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \left(v''(t) - v'(t)\right) + 3v'(t) - 15v(t) \\ &= v''(t) + 2v'(t) - 15v(t). \end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
**Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen**: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 15 = (\lambda + 5)(\lambda - 3),$$

da wir nach der Mitternachtsformel haben:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot 1 \cdot (-15)}}{2\cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4,$$

d.h. $\lambda_1 = -1 - 4 = -5$ und $\lambda_2 = -1 + 4 = 3$.

Es handelt sich jeweils um zwei einfache Nullstellen.
**Schritt 2. Allgemeine Lösung** $v$: Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung $v$:

$$v(t) = v_h(t) = C_1 \mathrm{e}^{-5t} + C_2 \mathrm{e}^{3t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Rücksubstitution/ Allgemeine Lösung** $y$: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v\left(\log(x)\right) = C_1 \mathrm{e}^{-5\log(x)} + C_2 \mathrm{e}^{3\log(x)} = C_1 \frac{1}{x^5} + C_2 x^3$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
**Schritt 4. Spezielle Lösung/ Anfangswertproblem**: Die Lösung $y$ hat die Ableitung:

$$y(x) = -5C_1 \frac{1}{x^6} + 3C_2 x^2$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Die beiden Anfangsbedingungen liefern nun

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = C_1 + C_2, \\ \frac{1}{8} &= y'(1) = -5C_1 + 3C_2. \end{aligned}$$

Aus der ersten lesen wir nun ab, dass $C_2 = -C_1$ sein muss, dies ergibt nun

$$\frac{1}{8} = -5C_1 + 3C_2 = -5C_1 - 3C_1 = -8C_1 \;\Leftrightarrow\; C_1 = -\frac{1}{64}.$$

Also ist

$$C_2 = -C_1 = \frac{1}{64}.$$

Die Lösung für das Anfangswertproblem lautet somit

$$y(x) = -\frac{1}{64x^5} + \frac{1}{64}x^3 = \frac{1}{64}\left(x^3 - x^{-5}\right)$$

für alle $x \in (0, \infty)$. □

(b) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

**Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen**: Alle Koeffizienten sind selber Potenzreihen/ Polynome und haben daher Konvergenzradius unendlich, also wird unsere Lösung laut Vorlesung auch auf ganz $\mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe gegeben sein.
**Schritt 2. Ansatz einsetzen**: Es gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 = y''(x) - 2xy'(x) - 2y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - 2nc_n x^n - 2c_n x^n\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2nc_n - 2c_n\right] x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(n+1)c_n\right] x^n \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
**Schritt 3. Koeffizientenvergleich**: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gelten:

$$\begin{aligned} (n+2)(n+1)c_{n+2} - 2(n+1)c_n &= 0 \\ \Leftrightarrow\ (n+2)(n+1)c_{n+2} &= 2(n+1)c_n \\ \Leftrightarrow\ c_{n+2} &= \frac{2}{n+2}c_n. \end{aligned}$$

**Schritt 4. Anfangsbedingungen**: Die Anfangsbedingungen ergeben:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = c_0, \\ 0 &= y'(0) = c_1. \end{aligned}$$

Dies liefert nun wegen der Vorschrift $c_{n+2} = \frac{2}{n+2}c_n$:

$$c_1 = c_3 = c_5 = c_7 = c_9 = c_{11} = c_{13} = c_{15} = \ldots = 0,$$

und

$$c_0 = 1,\ c_2 = 1,\ c_4 = \frac{1}{2},\ c_6 = \frac{1}{6},\ c_8 = \frac{1}{24},\ \ldots.$$

Also allgemeiner:

$$c_{2n+1} = 0 \text{ und } c_{2n} = \frac{1}{n!} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Also erhalten wir so als Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^{2n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

**Bemerkung**: Die Darstellungen für die Koeffizienten lassen sich einfach per vollständiger Induktion beweisen.
*Induktionsanfang (I.A.)* ($n = 0$): Es gilt laut den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} c_{2\cdot 0} &= c_0 = 1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{0!}, \\ c_{2\cdot 0+1} &= c_{0+1} = c_1 = 0. \end{aligned}$$

*Induktionsvoraussetzung (I.V.)*: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ fest, aber beliebig und für dieses $n$ gelte

$$c_{2n} = \frac{1}{n!} \text{ und } c_{2n+1} = 0.$$

*Induktionsschluss (I.S.)*: Es gilt nach der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} c_{2(n+1)} &= c_{2n+2} = \frac{2}{2n+2}c_{2n} = \frac{2}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{n!} = \frac{1}{(n+1)\cdot n!} = \frac{1}{(n+1)!}, \\ c_{2(n+1)+1} &= c_{2n+2+1} = c_{(2n+1)+2} = \frac{2}{2n+1+2}c_{2n+1} = \frac{2}{2n+3} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

## Aufgabe 2 (4 + 7 + 9 = 20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$-2xy\mathrm{d}x + \left(3x^2 - y^2\right)\mathrm{d}y = 0,\ x(1) = 1.$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Finden Sie einen Eulerschen Multiplikator $\eta = \eta(y)$, der nur von $y$ abhängig ist.

(c) Bestimmen Sie explizit die Lösung $x = x(y)$ des obigen Anfangswertproblems. Geben Sie auch das maximale Existenzintervall dazu an.

**Lösung von Aufgabe 2**

(a) Wir setzen

$$P(x,y) = -2xy \text{ und } Q(x,y) = 3x^2 - y^2$$

so sind die Funktionen $P$ und $Q$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Damit hat die Differentialgleichung die Form

$$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

**Nicht-Exaktheit**: Für die jeweiligen partiellen Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}\partial_y P(x,y) &= -2x,\\ \partial_x Q(x,y) &= 6x\end{aligned}$$

für alle Paare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit gilt:

$$-2x = \partial_y P(x,y) = \partial_x Q(x,y) = 6x \ \Leftrightarrow\ x = 0 \ \Leftrightarrow\ (x,y) \in \{(0,y) \colon y \in \mathbb{R}\} = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Damit stimmen diese beiden partiellen Ableitungen auf keiner nicht-leeren offenen Menge des $\mathbb{R}^2$ überein und die Differentialgleichung ist damit nicht exakt.
(b) **Eulerschen Multiplikator bestimmen**: Laut Aufgabenstellung wissen wir, dass es einen Eulerscher Multiplikator $\eta$ gibt, der nur von der Variable $y$ ab abhängt. Setzen wir nun

$$\begin{aligned}\widetilde{P}(x,y) &:= \eta(y)P(x,y) = -2xy\eta(y),\\ \widetilde{Q}(x,y) &:= \eta(y)Q(x,y) = \left(2x^2 - y^2\right)\eta(y)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Durch Multiplizieren der Differentialgleichung mit $\eta$ erhalten wir die neue Form

$$(*) \qquad \widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0.$$

Wir bestimmen erneut die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_y \widetilde{P}(x,y) &= -2x\eta(y) - 2xy\eta'(y),\\ \partial_x \widetilde{Q}(x,y) &= 6x\eta(y)\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soll nun die mit $\eta$ multiplizierte Differentialgleichung exakt sein, so muss

$$\partial_y \widetilde{P}(x,y) = \partial_x \widetilde{Q}(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sein, dies liefert uns

$$\begin{aligned}-2x\eta(y) - 2xy\eta'(y) = \partial_y \widetilde{P}(x,y) = \partial_x \widetilde{Q}(x,y) &= 6x\eta(y) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2\\ \Leftrightarrow\ -2xy\eta'(y) &= 8x\eta(y) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2\\ \Leftrightarrow\ \eta'(y) &= -\frac{4}{y}\eta(y).\end{aligned}$$

Dies ist eine lineare homogene Differentialgleichung erster Ordnung, laut der Trennung der Variablen erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}\log(|\eta|) = \int \frac{1}{\eta}\mathrm{d}\eta &= \int -\frac{4}{|y|}\mathrm{d}y + C = -4\log(|y|) + C\\ \Leftrightarrow\ |\eta(y)| &= \mathrm{e}^{-4\log(|y|)+C} = \mathrm{e}^C\,|y|^{-4} = \mathrm{e}^C y^{-4}\end{aligned}$$

für alle $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 0$. Ein möglicher/ gesuchter Eulerscher Multiplikator ist

$$\eta(y) = \mathrm{e}^0 y^{-4} = y^{-4} \text{ für alle } y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(c) **Stammfunktion $F$ bestimmen**: Da die Differentialgleichung $(*)$ nun exakt ist auf $\mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R} \times \{0\})$, existiert eine stetig differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}\times\{0\}) \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x,y) \\ \widetilde{Q}(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}\times\{0\})$. Dies impliziert nun

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \partial_x F(x,y)\mathrm{d}x = \int \widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int -2xyy^{-4}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{x^2}{y^3} + C(y) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}\times\{0\})$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$. Andererseits muss nun gelten

$$\begin{aligned} \frac{3x^2}{y^4} - \frac{1}{y^2} = \left(3x^2 - y^2\right)y^{-4} = \widetilde{Q}(x,y) = \partial_y F(x,y) &= \frac{3x^2}{y^4} + C'(y) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}\times\{0\}) \\ \Leftrightarrow\ C'(y) &= -\frac{1}{y^2} \\ \Leftrightarrow\ C(y) &= \int -\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{y} + C \end{aligned}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 0$. So lautet die Funktion $F$:

$$F(x,y) = -\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} \text{ für } (x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(\mathbb{R}\times\{0\}).$$

Weiter ist

$$F(1,1) = -\frac{1^2}{1^3} + \frac{1}{1} = -1 + 1 = 0.$$

**Anfangswertproblem lösen**: Laut Vorlesung ist nun jede Lösung $x\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems, wobei $1 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, gegeben durch

$$-\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} = F(x,y) = F(1,1) = 0 \text{ für alle } y \in I.$$

**Nach $x$ auflösen**: Wir können die obere Gleichung eindeutig nach $x$ auflösen:

$$\begin{aligned} -\frac{x^2}{y^3} + \frac{1}{y} &= 0 \\ \Leftrightarrow\ \frac{x^2}{y^3} &= \frac{1}{y} \\ \Leftrightarrow\ x^2 &= \frac{y^3}{y} = y^2 \\ \Leftrightarrow\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{y^2} = \pm|y| \end{aligned}$$

für alle $y \in I$.
Wegen $x(1) = 1 > 0$ lautet die gesuchte Lösung $x$:

$$x(y) = |y| \text{ für alle } y \in I.$$

**Maximales Existenzintervall**: Sei nun $I_{\max}$ das maximale Existenzintervall, insbesondere ist $1 \in I_{\max}$. Das maximale Existenzintervall ergibt sich, indem wir untersuchen, wann die Funktion $x$ reell und differenzierbar ist, d.h.

$$\begin{aligned} |y| &= x(y) \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow\ y &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Weiter ist die Betragsfunktion im Ursprung nicht differenzierbar und wegen $1 > 0$ folgt nun für das maximale Existenzintervall

$$I_{\max} = (0, \infty).$$

□

## Aufgabe 3  (10 + 2 + 8 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Matrixexponentialfunktion $\mathrm{e}^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

an.

(c) Machen Sie einen geeigneten partikulären Ansatz und bestimmen Sie so die Lösung des Anfangswertproblemes

$$y' = Ay + b, \; y(0) = y_0.$$

### Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen**: Es gilt nach der Regel von Sarrus

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & 1 \\ -3 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)\cdot(2-\lambda)\cdot(1-\lambda) + 0\cdot 1\cdot(-3) + 0\cdot 3\cdot 0 - (-3)\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - 0\cdot 1\cdot(4-\lambda) - (1-\lambda)\cdot 3\cdot 0 \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 \\ &= (4-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Also hat $p$ drei einfache Nullstelle bei $\lambda_1 = 1, \; \lambda_2 = 2$ und bei $\lambda_3 = 4$.

**Schritt 2. Eigenräume bestimmen**: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_1 = \ker(A - 1\cdot I_3) &= \ker \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot\frac{1}{3} \\ \cdot(-1) \;\; \cdot 1 \\ + \end{matrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_2 &= \ker(A - 2\cdot I_3) \\ &= \ker \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid\cdot\frac{1}{2} \;\; \cdot(-3) \;\; \cdot 3 \\ + \\ + \end{matrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ \cdot 1 \;\; \mid\cdot(-1) \end{matrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_4 &= \ker\left(A - 4 \cdot I_3\right) \\
&= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow + \\ \cdot 1 \end{array} \\
&= \ker \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \big| \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ \big| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ \phantom{0} \end{array} \\
&= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}
$$

**Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung/ Aufstellen der Fundamentalmatrix**: Die drei Fundamentallösungen lauten

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(t) &= \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \\
\Phi_2(t) &= \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\Phi_3(t) &= \mathrm{e}^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist nun die Fundamentalmatrix gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & \Phi_3(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{e}^{4t} \\ \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{2t} & \mathrm{e}^{4t} \\ -\mathrm{e}^{t} & 0 & -\mathrm{e}^{4t} \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \\ 1 & \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{3t} \\ -1 & 0 & -\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix}, \\
\Phi(0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Für die Matrixexponentialfunktion brauchen wir die inverse Matrix zu $\Phi(0)$. Dies berechnen wir über

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \quad \cdot 1 \\ + \\ + \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot 1 \end{array}
$$

$$
\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),
$$

d.h.

$$
\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

**Schritt 4. Matrixexponentialfunktion aufstellen**: Es gilt laut Vorlesung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} &= \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathrm{e}^{3t} \\ 1 & \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{3t} \\ -1 & 0 & -\mathrm{e}^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} & 0 & 0 \\ \mathrm{e}^{3t} - 1 & \mathrm{e}^{t} & \mathrm{e}^{t} - 1 \\ 1 - \mathrm{e}^{3t} & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

(b) Die (reelle) Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

lautet

$$\begin{aligned} y(t) = y_h(t) &= C_1\Phi_1(t) + C_2\Phi_2(t) + C_3\Phi_3(t) \\ &= C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

(c) **Partikulären Ansatz "raten"**: Wir machen den partikulären Ansatz

$$y_p(t) = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Abgeleitet gilt:

$$y_p'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Setzen wir diesen Ansatz in die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = Ay + b$$

ein, so erhalten

$$\begin{aligned} 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = y_p'(t) = Ay_p(t) + b = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Demnach lösen wir

$$\begin{aligned} &\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 0 & 0 & -8 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Big| \cdot \tfrac{1}{4} \quad \cdot(-3) \quad \cdot 3 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \cdot(-1) \\ \longrightarrow &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right). \end{aligned}$$

Also muss

$$\alpha = -2, \ \beta = 6 \text{ und } \gamma = -7$$

sein. Damit lautet die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

**Allgemeine Lösung $y$ aufstellen**: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist nun

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

**Spezielle Lösung $y$ aufstellen/ Anfangswertproblem**: Wegen den Anfangsdaten gilt

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} = y_0 = y(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix} + C_1 e^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2\cdot 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{4\cdot 0} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-2\\6\\-7\end{pmatrix} + C_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\ \Phi(0)\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1\\1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\10\\-6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-2\\6\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}$$

d.h

$$\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix} = \Phi(0)^{-1}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0&-1\\0&1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\0\end{pmatrix},$$

also ist

$$C_1 = -1,\ C_2 = 5 \text{ und } C_3 = 0.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblemes gegeben durch

$$y(t) = \begin{pmatrix}-2\\6\\-7\end{pmatrix} - \mathrm{e}^t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + 5\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. □

## Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte)

(a) Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung mithilfe des Charakteristikenverfahrens

$$\begin{aligned}\partial_x u(x,y) - \frac{1}{x^2}\partial_y u(x,y) &= u^2(x,y) \text{ für } x,y \in \mathbb{R},\\ u(x,0) &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mithilfe eines Separationsansatzes der Form $u(t,x) = v(t)w(x)$ mit einer geeigneten Funktion $w$

$$\begin{aligned}4\partial_t u(t,x) + \partial_{xx}u(t,x) - 3u(t,x) &= 0 \text{ auf } (0,\infty)\times(0,\pi),\\ u(0,x) &= \sin^3(x) \text{ für alle } x \in [0,\pi],\\ u(t,0) = 0 &= u(t,\pi) \text{ für alle } t \in [0,\infty).\end{aligned}$$

**Hinweis**: Benutzen Sie die Darstellung $\sin(x) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie damit $\sin^3(x)$.

### Lösung von Aufgabe 4

(a) **Schritt 1. Setting aufstellen**: Setzen wir

$$\begin{aligned}a(x,y,u) &= \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{x^2}\end{pmatrix},\\ b(x,y,u) &= u^2(x,y),\\ f(x) &= x.\end{aligned}$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases}a(x,y,u)\cdot\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}u(x,y) = b(x,y,u)\\ u(x,0) = f(x)\end{cases}.$$

**Schritt 2. Methode der Charakteristiken**: Setze die Charakteristik $k$:

$$k(s) = \begin{pmatrix}x(s)\\ y(s)\end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von $w$ und Einsetzen von $w$ und $k$ in die partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned}w'(s) &= \left(\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}u\right)(k(s))\cdot k'(s) = k'(s)\cdot\left(\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}u\right)(k(s))\\ a(k(s),w(s))\cdot\left(\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\end{pmatrix}u\right)(k(s)) &= b(k(s),w(s)).\end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}x'(s)\\ y'(s)\end{pmatrix} = k'(s) &= a(k(s),w(s)) = \begin{pmatrix}1\\ -\frac{1}{x(s)^2}\end{pmatrix},\\ w'(s) &= b(k(s),w(s)) = w^2(s),\\ k(0) &= \begin{pmatrix}x_0\\ 0\end{pmatrix},\\ w(0) = u(k(0)) &= u(x_0,0) = x_0.\end{aligned}$$

**Schritt 3. Charakteristikensystem lösen**:
**Lösung für** $k$: Die Differentialgleichungen für $x, y$ und $w$ lösen wir im folgenden:
**Lösung der Gleichung für** $x(\cdot)$:

$$x(s) = = s + C_1,$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$. Wegen $x(0) = k_1(0) = x_0$ folgt $C_1 = x_0$ und daher

$$x(s) = s + x_0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.

**Lösung der Gleichung für** $y(\cdot)$: Die Differentialgleichung für $y$ lautet:

$$y'(s) = -\frac{1}{x(s)^2} = -\frac{1}{(s+x_0)^2}.$$

Die Lösung dazu lautet:

$$y(s) = \frac{1}{s+x_0} + C_2 = \frac{1}{x(s)} + C_2$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $x(s) \neq 0$ für eine Konstante $C_2 \in \mathbb{R}$. Wegen $y(0) = k_2(0) = 0$ folgt

$$0 = y(0) = \frac{1}{0+x_0} + C_2 = \frac{1}{x_0} + C_2 \ \Leftrightarrow\ C_2 = -\frac{1}{x_0}$$

und daher

$$y(s) = \frac{1}{x(s)} - \frac{1}{x_0}$$

für $x_0 \neq 0$.

Für $x_0 = 0$ existiert keine Lösung zu diesen Anfangsdaten.

**Lösung der Gleichung für** $w(\cdot)$: Mithilfe der Trennung der Variablen gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w} &= \int \frac{1}{w^2}\mathrm{d}w = \int 1\mathrm{d}s + C_3 = s + C_3 \\ \Leftrightarrow\ w(s) &= -\frac{1}{s+C_3}. \end{aligned}$$

Ist $x_0 \neq 0$, so folgt mit $w(0) = x_0$, dass $C_3 = -\frac{1}{x_0}$ ist und

$$w(s) = -\frac{1}{s - \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{1 - sx_0}$$

für alle $s \in \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{1}{x_0}\right\}$.

**Schritt 4. Nach** $s$ **und** $x_0$ **auflösen und einsetzen**: Lösen wir nach $x_0$ auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x(s) &= s + x_0 \\ \Leftrightarrow\ s &= x(s) - x_0. \end{aligned}$$

Andererseits folgt:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{1}{x(s)} - \frac{1}{x_0} \\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x_0} &= \frac{1}{x(s)} - y(s) = \frac{1 - y(s)x(s)}{x(s)} \\ \Leftrightarrow\ x_0 &= \frac{x(s)}{1 - y(s)} \end{aligned}$$

Eingesetzt liefert dies uns

$$\begin{aligned} u(x(s), y(s)) = u(k(s)) = w(s) &= \frac{x_0}{1 - sx_0} \\ &= \frac{x_0}{1 - (x(s) - x_0)\, x_0} = \frac{x_0}{1 - x(s)x_0 + x_0^2} \\ &= \frac{x(s)}{(1 - y(s))\left(1 - \frac{x(s)^2}{1-y(s)} + \frac{x(s)^2}{(1-y(s))^2}\right)} = \frac{x(s)}{1 - y(s) - x(s)^2 + \frac{x(s)^2}{1-y(s)}} \\ &= \frac{(1-y(s))x(s)}{(1-y(s))^2 - (1-y(s))x(s)^2 + x(s)^2} = \frac{(1-y(s))x(s)}{(1-y(s))^2 + y(s)x(s)^2} \end{aligned}$$

für alle $s$. Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik $k$ ab, d.h. die Lösung $u$ lautet

$$u(x, y) = \frac{(1-y)x}{(1-y)^2 + x^2 y}$$

für alle

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon (1-y)^2 + x^2 y = 0\right\}.$$

$\square$

(b) Ist $u$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, dann gilt:

$$\begin{aligned}
u(0,x) = \sin^3(x) &= \left[\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)\right]^3 = -\frac{1}{8\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} - 3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + 3\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3x)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3x)}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{imax} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in [0,\pi]$. Wir machen den Ansatz:

$$\begin{aligned}
u_1(t,x) &= -\frac{1}{4}v_1(t)\sin(3x), \\
u_2(t,x) &= \frac{3}{4}v_2(t)\sin(x)
\end{aligned}$$

mit Funktionen $v_1,\ v_2\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so, dass $u_1$ und $u_2$ die partielle Differentialgleichung erfüllen mit $v_1(0) = 1 = v_2(0)$, denn dann erfüllt auch

$$u(t,x) := u_1(t,x) + u_2(t,x)$$

die partielle Differentialgleichung mit

$$\begin{aligned}
u(0,x) &= u_1(0,x) + u_2(0,x) = -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin(x) = \sin^3(x), \\
u(t,0) &= u_1(t,0) + u_2(t,0) = 0 + 0 = 0, \\
u(t,\pi) &= u_1(t,\pi) + u_2(t,\pi) = 0 + 0 = 0
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0,\infty)$ und $x \in [0,\pi]$, d.h. $u$ ist die gesuchte Lösung unseres Problems. Es gilt für die partiellen Ableitungen von $u_1$ und $u_2$:

$$\begin{aligned}
\partial_t u_1(t,x) &= -\frac{1}{4}v_1'(t)\sin(3x), \\
\partial_x u_1(t,x) &= -\frac{3}{4}v_1(t)\cos(3x), \\
\partial_{xx} u_1(t,x) &= \frac{9}{4}v_1(t)\sin(3x), \\
\partial_t u_2(t,x) &= \frac{3}{4}v_1'(t)\sin(x), \\
\partial_x u_2(t,x) &= \frac{3}{4}v_1(t)\cos(x), \\
\partial_{xx} u_2(t,x) &= -\frac{3}{4}v_1(t)\sin(x)
\end{aligned}$$

für alle $t$ und $x$. Eingesetzt in die partielle Differentialgleichung erhalten wir somit:

$$\begin{aligned}
& 0 = 4\partial_t u_1(t,x) + \partial_{xx}u_1(t,x) - 3u_1(t,x) = -v_1'(t)\sin(3x) + \frac{9}{4}v_1(t)\sin(3x) + \frac{3}{4}v_1(t)\sin(3x) \\
& \quad = (-v_1'(t) + 3v_1(t))\sin(3x) \\
\Leftrightarrow\ & 0 = -v_1'(t) + 3v_1(t) \ \Leftrightarrow\ v_1'(t) = 3v_1(t), \\
& 0 = 4\partial_t u_2(t,x) + \partial_{xx}u_2(t,x) - 3u_2(t,x) = \frac{12}{4}v_2'(t)\sin(x) - \frac{3}{4}v_2(t)\sin(x) - \frac{9}{4}v_2(t)\sin(x) \\
& \quad = \frac{12}{4}\left(v_2'(t) - v_2(t)\right) \\
\Leftrightarrow\ & 0 = v_2'(t) - v_2(t) \ \Leftrightarrow\ v_2'(t) = v_2(t),
\end{aligned}$$

d.h.

$$v_1(t) = C_1\mathrm{e}^{3t} \text{ und } v_2(t) = C_2\mathrm{e}^{t}$$

für alle $t \geq 0$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wegen der Bedingung $v_1(0) = v_2(0) = 1$ folgt nun $C_1 = C_2 = 1$ und es ist:

$$v_1(t) = \mathrm{e}^{3t} \text{ und } v_2(t) = \mathrm{e}^{t}$$

für alle $t \geq 0$. Also lauten

$$u_1(t,x) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}\sin(3x),$$
$$u_2(t,x) = \frac{3}{4}\mathrm{e}^{t}\sin(x)$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in [0,\pi]$. Damit lautet die Lösung des Problems:

$$u(t,x) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{3t}\sin(3x) + \frac{3}{4}\mathrm{e}^{t}\sin(x) = \frac{\mathrm{e}^{t}}{4}\left(3\sin(x) - \mathrm{e}^{2t}\sin(3x)\right)$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in [0,\pi]$. □

**Hinweise**: Ergebnisse dieser Modulprüfung werden spätestens am ?? den ??.10.2019 im Mathematik Gebäude (20.30) im zweiten Stock veröffentlicht.
Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den 17.10.2019 von 16.00 Uhr bis 18.00 Uhr statt.
Die mündlichen Nachprüfungen finden in der Woche vom 21.10.2019 bis 25.10.2019 statt. Genaueres wird sich online auf der Homepage der Vorlesung finden.