Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Modulprüfung

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Sommersemester 2021

10. August 2021

Schreiben Sie auf **jedes abzugebende Blatt** Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabennummer. Beachten Sie die Hinweise auf dem Deckblatt.
Zum Bestehen der Klausur sind **27** von **80** Punkten hinreichend. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt. Es ist kein Taschenrechner zugelassen.

Aufgabe 1 (20 Punkte):
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen y der Differentialgleichung

$$x^3 y'''(x) - x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 6y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms des dazugehörigen Konstanten-Koeffizienten-Problems lautet 2.

Aufgabe 2 ($\mathbf{12 + 8 = 20}$ Punkte):
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \alpha \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: $A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sei nun $\alpha = 1$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Aufgabe 3 (5 + 15 = 20 Punkte):
Betrachten Sie in dieser Aufgabe die Wellengleichung mit periodischen Randbedingungen:

$$(\star)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0, 2\pi), t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0, 2\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x \in [0, 2\pi], \\ u(0,t) = u(2\pi, t), & t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t), & t > 0, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} f \in C^2([0,2\pi],\mathbb{R}), \\ g \in C^1([0,2\pi],\mathbb{R}). \end{array}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $u \in C^2([0, 2\pi] \times [0, \infty))$ eine Lösung von $(\star)$, dann ist $I(t) := \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$ für $t \geq 0$ konstant.

(b) Lösen Sie mithilfe des Separationsansatzes $u(x,t) = z(t)w(x)$ das Problem $(\star)$ für $f(x) := \sin(2x+1)$, $g(x) = 0$. Finden Sie für diese Lösung ein minimales $T > 0$ mit $u(x,t) = u(x, t+T)$.

Aufgabe 4 (4 + 16 = 20 Punkte):
Seien $a \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ und sei $v \in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ eine Lösung der folgenden Transportgleichung mit nicht-konstanter Geschwindigkeit

$$(\star)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,t) - a(y)\,\dfrac{\partial v}{\partial y}(y,t) = g(y,t), & y, t \in \mathbb{R} \\ v(y,0) = 0, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Sei $z \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ eine Lösung von $z' = a(z)$. Zeigen Sie: Die Funktion $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,t) := v(z(x),t)$ ist eine Lösung der Transportgleichung

$$(\diamond)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = g(z(x),t), & x, t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Seien nun $a(y) := \sqrt{1+y^2}$ und $g(y,t) := 1 + y^2$. Nutzen Sie Teil (a), um eine Darstellung von v zu erhalten, die keine Integrale mehr enthält.
Hinweis: $\sqrt{1+\sinh^2(x)} = \cosh(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x)$. Die Umkehrfunktion von sinh heißt arsinh und kann als Ausdruck in der Darstellung von v stehen bleiben.