Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Sommersemester 2021

10. August 2021

Aufgabe 1 (20 Punkte):
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen y der Differentialgleichung

$$x^3y'''(x) - x^2y''(x) - 2xy'(x) + 6y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms des dazugehörigen Konstanten-Koeffizienten-Problems lautet 2.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Es handelt sich hier um eine Eulersche Differentialgleichung und wir gehen vor wie in der Übung. Für $x > 0$ schreiben wir $x = \mathrm{e}^t$ mit $t \in \mathbb{R}$ und substituieren $y(x) = u(\ln(x))$, d.h. $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$. Wir rechnen die ersten drei Ableitungen aus.

$$\begin{aligned}
u'(t) &= y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t = y'(x)x, \\
u''(t) &= y''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t = y''(x)x^2 + y'(x)x, \\
u'''(t) &= y'''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{3t} + 3y''(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^{2t} + y'(\mathrm{e}^t)\mathrm{e}^t = y'''(x)x^3 + 3y''(x)x^2 + y'(x)x.
\end{aligned}$$

Wir lösen nach den höchsten Ableitungen in y auf und ersetzen die niedrigeren Ableitungen in y mit Ableitungen in u. Damit erhalten wir:

$$y'(x)x = u'(t), \qquad y''(x)x^2 = u''(t) - u'(t), \qquad y'''(x)x^3 = u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t).$$

Aus diesen Identitäten erhalten wir das zugehörige Konstante-Koeffizienten Problem

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} x^3y'''(x) - x^2y''(x) - 2xy'(x) + 6y(x) \\
&= [u'''(t) - 3u''(t) + 2u'(t)] - [u''(t) - u'(t)] - 2u'(t) + 6u(t) \\
&= u'''(t) - 4u''(t) + u'(t) + 6u(t).
\end{aligned}$$

Dessen charakteristisches Polynom ist $\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda + 6 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3)$. Somit lauten die reellen Lösungen des Konstante-Koeffizienten-Problems

$$u(t) = \alpha\mathrm{e}^{-t} + \beta\mathrm{e}^{2t} + \gamma\mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

mit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Durch Rücksubstitution $y(x) = u(\ln(x))$ erhalten wir daraus die allgemeine reelle Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung als

$$y(x) = \alpha x^{-1} + \beta x^2 + \gamma x^3, \qquad x > 0.$$

Aufgabe 2 ($12 + 8 = 20$ Punkte):
Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \alpha & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \alpha \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie e^{tA} für alle $t \in \mathbb{R}$.
Hinweis: $A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Sei nun $\alpha = 1$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A \cdot \vec{y}(x) + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \\ \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(a) **Variante 1:** Exponentialreihe.
Wir schreiben $A = \alpha I + B$ mit $B := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $\alpha I \cdot B = B \cdot \alpha I$ und deshalb nach Vorlesung $\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\alpha I}\mathrm{e}^{tB}$, wobei $\mathrm{e}^{t\alpha I} = \mathrm{e}^{\alpha t} I$. Das Exponential e^{tB} können wir direkt mit der Exponentialreihe berechnen. Es gilt

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und damit $B^{2k} = \left(B^2\right)^k = I$ sowie $B^{2k+1} = \left(B^2\right)^k B = B$ für $k \in N_0$. Wir setzen in die Exponentialreihe ein:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tB} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} B^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} B^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} B^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} \cdot I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot B = \cosh(t) I + \sinh(t) B = \begin{pmatrix} \cosh(t) & \mathrm{i}\sinh(t) \\ -\mathrm{i}\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{t\alpha I}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \mathrm{i}\sinh(t) \\ -\mathrm{i}\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}.$$

Variante 2: Diagonalisieren.
Wir diagonalisieren die Matrix A. Dazu bestimmen wir zuerst die Eigenwerte. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & \alpha - \lambda \end{pmatrix} = (\alpha - \lambda)^2 - 1,$$

und dessen Nullstellen sind $\lambda_1 = \alpha + 1, \lambda_2 = \alpha - 1$.

Wir bestimmen die Eigenräume:

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A, \lambda_1) &= \mathrm{Kern}\,(A - \lambda_1 I) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, \\ \mathrm{Eig}(A, \lambda_2) &= \mathrm{Kern}\,(A - \lambda_2 I) = \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} \rangle. \end{aligned}$$

Somit können wir A schreiben als $A = TDT^{-1}$ mit

$$D := \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T := \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt (z.B. nach Aufgabe 16 Teil (iii) von Übungsblatt 9)

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= T\mathrm{e}^{tD}T^{-1} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(\alpha+1)t} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{(\alpha-1)t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{t} \\ -\mathrm{e}^{-t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} \mathrm{i}\mathrm{e}^{t} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-t} & -\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t} \\ \mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{i}\mathrm{e}^{t} + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha t}}{2\mathrm{i}} \begin{pmatrix} 2\mathrm{i}\cosh(t) & -2\sinh(t) \\ 2\sinh(t) & 2\mathrm{i}\cosh(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cosh(t) & \mathrm{i}\sinh(t) \\ -\mathrm{i}\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(b) $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$ ist ein Fundamentalsystem für $\vec{y}\,' = A\vec{y}$. Somit erhalten wir die Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung aus der Variation–der–Konstanten Formel: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} \vec{y}(t) &= \mathrm{e}^{tA}\left(\mathrm{e}^{0A}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{tA} \int_0^t \left(\mathrm{e}^{\tau A}\right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^t \mathrm{e}^{(t-\tau)A} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau} \begin{pmatrix} \cosh(t-\tau) & \mathrm{i}\sinh(t-\tau) \\ -\mathrm{i}\sinh(t-\tau) & \cosh(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\tau} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\ &= \mathrm{e}^{t} \int_0^t \begin{pmatrix} \cosh(t-\tau) \\ -\mathrm{i}\sinh(t-\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{t} \left[\begin{pmatrix} -\sinh(t-\tau) \\ \mathrm{i}\cosh(t-\tau) \end{pmatrix} \right]_{\tau=0}^{\tau=t} = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \mathrm{i} - \mathrm{i}\cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 ($5 + 15 = 20$ Punkte):
Betrachten Sie in dieser Aufgabe die Wellengleichung mit periodischen Randbedingungen:

$$(\star)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in (0, 2\pi), t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in [0, 2\pi], \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), & x \in [0, 2\pi], \\ u(0,t) = u(2\pi, t), & t > 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t), & t > 0, \end{cases} \qquad \text{mit} \quad \begin{array}{l} f \in C^2([0,2\pi], \mathbb{R}), \\ g \in C^1([0,2\pi], \mathbb{R}). \end{array}$$

(a) Zeigen Sie: Ist $u \in C^2([0, 2\pi] \times [0, \infty))$ eine Lösung von $(\star)$, dann ist $I(t) := \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x$ für $t \geq 0$ konstant.

(b) Lösen Sie mithilfe des Separationsansatzes $u(x,t) = z(t)w(x)$ das Problem $(\star)$ für $f(x) := \sin(2x+1)$, $g(x) = 0$. Finden Sie für diese Lösung ein minimales $T > 0$ mit $u(x,t) = u(x, t+T)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Laut HM 2 ist I damit insbesondere eine C^1 Funktion und in der folgenden Rechnung lässt sich die Ableitung und das Integral vertauschen. Wir erhalten für $t > 0$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\,\mathrm{d}x = \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0.$$

Also ist I konstant. Insbesondere gilt mit den Anfangswerten $I(t) = I(0) = \int_0^{2\pi} g(x)\,\mathrm{d}x$.
Bemerkung zur Korrektur: Wir argumentieren in diesem Lösungsvorschlag ausführlicher als die Erwartungshaltung an die Studierenden. Es genügt die Rechnung zur Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t) = \ldots = 0$. Die genaue Argumentation, warum I eine C^1-Funktion ist, warum Integral & Ableitung vertauscht werden dürfen und was der konkrete Wert von I ist, war nicht verlangt.

(b) Einsetzen des Separationsansatzes $u(x,t) = z(t)w(x)$ in die Differentialgleichung in $(\star)$ liefert für $x \in (0, 2\pi)$, $t > 0$:

$$0 \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = z''(t)w(x) - z(t)w''(x) \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{z''(t)}{z(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)},$$

falls $w(x) \neq 0 \neq z(t)$. Damit muss es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass

$$z''(t) = -\lambda z(t), \quad t > 0, \qquad w''(x) = -\lambda w(x), \quad x \in (0, 2\pi)$$

gilt. Für die Randwerte erhalten wir für $x \in (0, 2\pi)$, $t > 0$:

$$\begin{aligned} z(t)w(0) &= u(0,t) \stackrel{!}{=} u(2\pi, t) = z(t)w(2\pi), \\ z(t)w'(0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) \stackrel{!}{=} \frac{\partial u}{\partial x}(2\pi, t) = z(t)w'(2\pi), \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} f(x) &\stackrel{!}{=} u(x,0) = z(0)w(x), \\ g(x) &\stackrel{!}{=} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = z'(0)w(x). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen sind erfüllt, falls

$$\boxdot \begin{cases} -w''(x) = \lambda w(x), & x \in (0, 2\pi), \\ w(0) = w(2\pi), \\ w'(0) = w'(2\pi), \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \odot \begin{cases} z''(t) = -\lambda z(t), \quad t > 0, \\ z(0) = \dfrac{f(x)}{w(x)} \stackrel{!}{=} c = \text{const}, \\ z'(0) = \dfrac{g(x)}{w(x)} \stackrel{!}{=} d = \text{const}. \end{cases}$$

Wir geben zwei Varianten zur expliziten Lösung an.

Variante 1: Mit $\odot$ beginnen und in $\boxdot$ einsetzen.

In $\odot$ erkennen wir, dass f und g Vielfache von w sein müssen und setzen an: $w(x) := \frac{1}{c} f(x) = \frac{1}{c}\sin(2x+1)$ und $d = \frac{g(x)}{w(x)} = 0$. Diesen Ansatz setzen wir in die Differentialgleichung in $\boxdot$ ein und erhalten

$$\frac{\lambda}{c}\sin(2x+1) = \lambda w(x) \stackrel{!}{=} -w''(x) = -\frac{4}{c}\sin(2x+1), \qquad \text{für alle } \ x \in (0, 2\pi).$$

Diese Gleichung ist offensichtlich genau dann erfüllt, wenn $\lambda = 4$. Die Randwerte in $\boxdot$ sind ebenfalls erfüllt:

$$\begin{aligned} w(0) &= \frac{1}{c}\sin(1) = \frac{1}{c}\sin(4\pi+1) = w(2\pi), \\ w'(0) &= \frac{2}{c}\cos(1) = \frac{2}{c}\cos(4\pi+1) = w'(2\pi), \end{aligned}$$

wobei wir die 2π-Periodizität von sin und cos genutzt haben. Wir bestimmen damit nun die Lösung von $\odot$. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $z'' = -4\lambda z$ lautet $z(t) = A\sin(2t) + B\cos(2t)$. Einsetzen der Randwerte $z(0) = c$ und $z'(0) = d = 0$ liefert $B = c$ und $A = 0$. Also:

$$\odot \begin{cases} z''(t) = -4z(t), \quad t > 0, \\ z(0) = c, \\ z'(0) = 0, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad z(t) = c\cos(2t).$$

Wir setzen den Separationsansatz zusammen:

$$u(x,t) = z(t)w(x) = c\cos(2t) \cdot \frac{1}{c}\sin(2x+1) = \cos(2t)\sin(2x+1).$$

Variante 2: RWP $\boxdot$ analysieren und mit $\odot$ matchen.
Wie in der Übung argumentieren wir zu erst, dass $\lambda \geq 0$ gilt. Hierzu rechnen wir für eine Lösung w von $\boxdot$:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^{2\pi} (w(x))^2 \,\mathrm{d}x &= -\int_0^{2\pi} w(x)w''(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -w(2\pi)w'(2\pi) + w(0)w'(0) + \int_0^{2\pi} w'(x)w'(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} (w'(x))^2\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Falls w nicht konstant ist, dann ist $\lambda > 0$. Falls w konstannt ist, dann ist $\lambda = 0$. Wir folgern: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in $\boxdot$ hat die Form

$$w(x) = A\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right), \quad \text{d.h.} \quad w'(x) = A\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) - B\sqrt{\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right).$$

Einsetzen der periodischen Randwerte liefert

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A\cdot 0 + B\cdot 1 = w(0) \stackrel{!}{=} w(2\pi) = A\sin\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) + B\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right), \\ A\sqrt{\lambda}\cdot 1 - B\sqrt{\lambda}\cdot 0 = w'(0) \stackrel{!}{=} w(2\pi) = A\sqrt{\lambda}\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - B\sqrt{\lambda}\sin\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right), \end{cases} \\ \Leftrightarrow \qquad &\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \text{Kern} \begin{pmatrix} \sin\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) & \cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - 1 \\ \sqrt{\lambda}\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - \sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda}\sin\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit w nicht konstant die Nullfunktion ist, muss die Determinante der Matrix 0 sein. Wir berechnen:

$$\begin{aligned} &\det \begin{pmatrix} \sin\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) & \cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - 1 \\ \sqrt{\lambda}\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - \sqrt{\lambda} & -\sqrt{\lambda}\sin\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) \end{pmatrix} = -\sqrt{\lambda}\sin^2\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - \sqrt{\lambda}\left(\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - 1\right)^2 \\ &\quad = -\sqrt{\lambda}\cdot\left(\sin^2\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) + \cos^2\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - 2\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) + 1\right) = 2\sqrt{\lambda}\cdot\left(\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) - 1\right). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $\sin^2 + \cos^2 = 1$ genutzt. Wir sehen also: Die Determinante der Matrix ist genau dann 0, wenn $\cos\left(2\sqrt{\lambda}\pi\right) = 1$, d.h. wenn es ein $k \in \mathbb{N}_0$ gibt, sodass $\sqrt{\lambda} = k$. In diesem Fall ist die Matrix die Nullmatrix, d.h. die Lösung w des Randwertproblems $\boxdot$ lautet

$$\begin{aligned} w(x) &= A\sin(kx) + B\cos(kx), && \text{falls} \quad \lambda > 0, \\ w(x) &= C, && \text{falls} \quad \lambda = 0. \end{aligned}$$

Damit das AWP $\odot$ für z aus unserem Separationsansatz lösbar ist, müssen f und g jeweils Vielfache von w sein. In diesem Fall lautet die Lösung z des AWP $\odot$: $z(t) = c\cos(kx) + \frac{d}{k}\sin(kx)$ für $k \in \mathbb{N}$ und $z(t) = c + dx$ für $k = 0$. Dies sieht man sofort an der allgemeinen Lösungsformel und durch Einsetzen der Anfangswerte. Mit der Vorgabe der Anfangswerte $f(x) = \sin(2x+1) = \cos(1)\sin(2x) + \sin(1)\cos(2x)$ und $g(x) = 0$ wählen wir $\lambda = 4$ (d.h. $k = 2$), $A = \cos(1)$, $B = \sin(1)$, $c = 1$ und $d = 0$. Dann löst $w = f$ das RWP $\boxdot$ und zusätzlich sind f, g Vielfache von w. Damit ist $z(t) = \cos(2t)$ die Lösung des AWP $\odot$. Wir setzen den Separationsansatz zusammen:

$$u(x,t) = z(t)w(x) = \cos(2t) \cdot \sin(2x+1) = \cos(2t)\sin(2x+1).$$

Weiter zur Zeitperiodizität.
Wir erkennen sofort: Die minimale Zeitperiode von $u(x,t) = \cos(2t)\sin(2x+1)$ lautet $T = \pi$.

Aufgabe 4 ($4 + 16 = 20$ Punkte):
Seien $a \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und sei $v \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ eine Lösung der folgenden Transportgleichung mit nicht-konstanter Geschwindigkeit

$$(\star)\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(y,t) - a(y)\,\dfrac{\partial v}{\partial y}(y,t) = g(y,t), & y,t \in \mathbb{R} \\ v(y,0) = 0, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(a) Sei $z \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Lösung von $z' = a(z)$. Zeigen Sie: Die Funktion $u \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $u(x,t) := v(z(x), t)$ ist eine Lösung der Transportgleichung

$$(\diamond)\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t) = g(z(x),t), & x,t \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

(b) Seien nun $a(y) := \sqrt{1+y^2}$ und $g(y,t) := 1 + y^2$. Nutzen Sie Teil (a), um eine Darstellung von v zu erhalten, die keine Integrale mehr enthält.
Hinweis: $\sqrt{1+\sinh^2(x)} = \cosh(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x)$. Die Umkehrfunktion von sinh heißt arsinh und kann als Ausdruck in der Darstellung von v stehen bleiben.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(a) Für die Substitution $u(x,t) := v(z(x), t)$ rechnen wir mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t}(z(x),t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial y}(z(x),t) \cdot z'(x).$$

Wir setzen die Differentialgleichung an z und die Transportgleichung $(\star)$ an v ein und erhalten für $x, t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial v}{\partial t}(z(x),t) - \frac{\partial v}{\partial y}(z(x),t) \cdot z'(x) \\ &= \frac{\partial v}{\partial t}(z(x),t) - \frac{\partial v}{\partial y}(z(x),t) \cdot a(z(x)) = g(z(x),t). \end{aligned}$$

Weiter gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$u(x,0) = v(z(x),0) = 0.$$

Damit löst u die Transportgleichung $(\diamond)$.

(b) Wir setzen $z(x) := \sinh(x)$, denn dann folgt aus dem Hinweis direkt $z' = a(z)$. Die rechte Seite der Differentialgleichung in $(\star)$ transformiert zu $g(z(x),t) = 1 + \sinh^2(x) = \cosh^2(x)$. Wir lösen nun

$$(\diamond)\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \cosh^2(x) \\ u(x,0) = 0. \end{cases}$$

Laut Vorlesung gilt für $\tilde{a} \in \mathbb{R}$, $\tilde{g}, \tilde{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + \tilde{a}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = \tilde{g}(x,t) \\ u(x,0) = \tilde{f}(x,t), \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad u(x,t) = \tilde{f}(x - \tilde{a}t) + \int_0^t \tilde{g}(x + (s-t)\tilde{a}, s)\,\mathrm{d}s\,,$$

Damit erhalten wir die Lösung u von $(\diamond)$:

$$u(x,t) = 0 + \int_0^t \cosh^2(x - s + t))\,\mathrm{d}s = \int_x^{x+t} \cosh^2(s)\,\mathrm{d}s\,, \qquad x,t \in \mathbb{R}.$$

Wir geben zwei Varianten an, dieses Integral zu berechnen.

Variante 1: Stammfunktion von $\cosh^2$ nutzen.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_x^{x+t} \cosh^2(s)\,\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{2}(s+\sinh(s)\cosh(s))\right]_x^{x+t} \\ &= \frac{1}{2}(x+t+\sinh(x+t)\cosh(x+t)) - \frac{1}{2}(x+\sinh(x)\cosh(x)) \\ &= \frac{1}{2}\big(t+\sinh(x+t)\cosh(x+t)-\sinh(x)\cosh(x)\big). \end{aligned}$$

Wir substituieren nun zurück mit $v(y,t)=u(\operatorname{arsinh}(y),t)$, vereinfachen noch etwas mit dem Hinweis und erhalten damit für $y,t\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} v(y,t) &= \frac{1}{2}\big(t+\sinh(\operatorname{arsinh}(y)+t)\cosh(\operatorname{arsinh}(y)+t) - y\cosh(\operatorname{arsinh}(y))\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(t+\sinh(\operatorname{arsinh}(y)+t)\cosh(\operatorname{arsinh}(y)+t) - y\sqrt{1+y^2}\right). \end{aligned}$$

Dies ist eine Darstellung von v ohne Integrale.

Variante 2: Nutze $\cosh(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})$.

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_x^{x+t} \cosh^2(s)\,\mathrm{d}s = \int_x^{x+t} \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^s+\mathrm{e}^{-s}\right)^2\mathrm{d}s \\ &= \int_x^{x+t} \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2s}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2s}\,\mathrm{d}s = \left[\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2s}+\frac{1}{2}s-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2s}\right]_x^{x+t} \\ &= \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2(x+t)}+\frac{1}{2}(x+t)-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2(x+t)}-\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2x} \\ &= \frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sinh(2(x+t))-\frac{1}{4}\sinh(2x). \end{aligned}$$

Wir substituieren nun zurück mit $v(y,t)=u(\operatorname{arsinh}(y),t)$ erhalten damit für $y,t\in\mathbb{R}$:

$$v(y,t)=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sinh(2(\operatorname{arsinh}(y)+t))-\frac{1}{4}\sinh(2\operatorname{arsinh}(y)).$$

Dies ist eine Darstellung von v ohne Integrale.

Bemerkung zur Korrektur:
Weitere Vereinfachungsschritte, z.B. durch Additionstheoreme für sinh & cosh, waren nicht verlangt.