Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann

WS 2021/2022
13.09.2022

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Nachprüfung

Aufgabe 1 (8+(3+9)=20 Punkte)

(a) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\left(\frac{6}{x}\cos(y) - \frac{2}{x^2}e^{-2x}\right)\,dx - 3\left(\sin(y) + \frac{y^2}{x^2}\right)\,dy = 0\,, \quad (x,y) \in D\,,$$

nicht exakt in D ist. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor μ der Form $\mu(x,y) = x^\alpha$ für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form.

(b) (i) Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $y_1(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung von

$$y''(x) - \frac{2}{1+2x}y'(x) - \frac{3+2x}{1+2x}y(x) = 0\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,,$$

ist.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{2}{1+2x}y'(x) - \frac{3+2x}{1+2x}y(x) = -\frac{4}{1+2x}e^x\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$.

Aufgabe 2 (8+12=20 Punkte)

(a) Berechnen Sie die ersten fünf Koeffizienten $a_0, \ldots, a_4$ der Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\,,$$

der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 2xy'(x) - y(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) + 4y''(x) + 6y'(x) + 4y(x) = -40\sin(2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen Gleichung ist gegeben durch -2.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3 (10+10=20 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Matrixexponentialfunktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei A die Matrix aus (a) ist.

Aufgabe 4 (10+10=20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{aligned} \left(1+3y^2\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \cos(y)\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,, \\ u(x,0) &= x^2\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens. Bestätigen Sie durch eine Probe, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt.

(b) Bestimmen Sie für das Randwertproblem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0\,, \quad x \in (0,1)\,,\ t > 0\,, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= 0\,, \quad t > 0\,, \end{aligned}$$

alle Lösungen der Form $u(x,t) = e^{\mu^2 t} w(x)$, $x \in [0,1], t \geq 0$, wobei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $w : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Viel Erfolg!