Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschläge zur Nachprüfung

Aufgabe 1 (8+(3+9)=20 Punkte)

(a) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\left(\frac{6}{x}\cos(y) - \frac{2}{x^2}e^{-2x}\right)dx - 3\left(\sin(y) + \frac{y^2}{x^2}\right)dy = 0\,, \quad (x,y) \in D\,,$$

nicht exakt in D ist. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor μ der Form $\mu(x,y) = x^\alpha$ für ein geeignetes $\alpha \in \mathbb{R}$ und berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form.

(b) (i) Bestimmen Sie $\lambda \in \mathbb{R}$ so, dass $y_1(x) = e^{\lambda x}$ eine Lösung von

$$y''(x) - \frac{2}{1+2x}y'(x) - \frac{3+2x}{1+2x}y(x) = 0\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,,$$

ist.

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - \frac{2}{1+2x}y'(x) - \frac{3+2x}{1+2x}y(x) = -\frac{4}{1+2x}e^x\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz $y(x) = v(x)y_1(x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

(a) Die gegebene Differentialgleichung hat die Form

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,, \quad (x,y) \in D\,,$$

mit den Funktionen $P, Q : D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$P(x,y) = \frac{6}{x}\cos(y) - \frac{2}{x^2}e^{-2x}\,,$$
$$Q(x,y) = -3\sin(y) - 3\frac{y^2}{x^2}\,.$$

Diese sind stetig differenzierbar auf der offenen und einfach zusammenhängenden Menge D. Wir berechnen

$$\partial_y P(x,y) = -\frac{6}{x}\sin(y)\,,$$
$$\partial_x Q(x,y) = 6\frac{y^2}{x^3}$$

für alle $(x,y) \in D$. Da $\partial_y P$ und $\partial_x Q$ auf D nicht übereinstimmen, ist die Gleichung nicht exakt in D. Wir machen den Ansatz

$$\tilde{P}(x,y) = \mu(x,y)P(x,y) = 6x^{\alpha-1}\cos(y) - 2x^{\alpha-2}e^{-2x}\,,$$
$$\tilde{Q}(x,y) = \mu(x,y)Q(x,y) = -3x^\alpha\sin(y) - 3x^{\alpha-2}y^2\,,$$

und berechnen

$$\partial_y \tilde{P}(x,y) = -6x^{\alpha-1}\sin(y)\,,$$
$$\partial_x \tilde{Q}(x,y) = -3\alpha x^{\alpha-1}\sin(y) - 3(\alpha-2)x^{\alpha-3}y^2\,.$$

Gleichsetzen liefert die Bedingung

$$-6x^{\alpha-1}\sin(y) \overset{!}{=} -3\alpha x^{\alpha-1}\sin(y) - 3(\alpha-2)x^{\alpha-3}y^2\,, \quad (x,y)\in D\,,$$

welche für $\alpha = 2$ erfüllt ist. Wir sehen, dass $\mu(x,y) = x^2$ stets positiv ist auf D und somit ist die Differentialgleichung

$$\left(6x\cos(y) - 2e^{-2x}\right)\,dx - 3\left(x^2\sin(y) + y^2\right)\,dy = 0\,, \quad (x,y)\in D\,,$$

äquivalent zur gegebenen Differentialgleichung und exakt in D. Um ein Potential F für das Vektorfeld $\begin{pmatrix}\tilde{P}\\ \tilde{Q}\end{pmatrix}$ zu bestimmen, gehen wir von $\partial_x F = \tilde{P}$ aus und integrieren bzgl. x. Dies liefert

$$F(x,y) = \int \tilde{P}(x,y)\,dx = \int \left(6x\cos(y) - 2e^{-2x}\right)\,dx = 3x^2\cos(y) + e^{-2x} + \phi(y)$$

mit einer Funktion ϕ, für die wir aus der Bedingung $\partial_y F = \tilde{Q}$ die Gleichung

$$-3x^2\sin(y) + \phi'(y) \overset{!}{=} -3x^2\sin(y) - 3y^2\,, \quad (x,y)\in D\,,$$

erhalten. Also erhalten wir $\phi(y) = -y^3$ (die Integrationskonstante können wir weglassen, da eine additive Konstante für das Potential keine Rolle spielt) und

$$F(x,y) = 3x^2\cos(y) + e^{-2x} - y^3\,, \quad (x,y)\in D\,,$$

ist ein Potential und die allgemeine Lösung ist implizit gegeben durch

$$3x^2\cos(y) + e^{-2x} - y^3 = c\,, \quad (x,y)\in D\,,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(b) (i) Wir setzen den Ansatz ein und erhalten nach Multiplikation mit $1+2x$ die Bedingung

$$(2\lambda^2 - 2)x + \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,.$$

Koeffizientenvergleich führt auf $2(\lambda^2 - 1) = 0$ und $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Wir sehen, dass $\lambda = -1$ diese Bedingungen erfüllt und somit ist $y_1(x) = e^{-x}, x > -1/2$, eine Lösung.

(ii) Wir verwenden das Reduktionsverfahren von d'Alembert und setzen $y(x) = v(x)y_1(x)$ in die Differentialgleichung ein, was auf die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(x) + \left(-2 - \frac{2}{1+2x}\right)u(x) = -\frac{4}{1+2x}e^{2x}\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,, \tag{1}$$

für die Funktion $u := v'$ führt. Die homogene Gleichung hat die allgemeine Lösung

$$u_h(x) = c\exp\left(\int\left(2 + \frac{2}{1+2x}\right)\,dx\right) = c\exp\big(2x + \ln(1+2x)\big) = c(1+2x)e^{2x}\,,\ x > -\frac{1}{2}\,,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung u_p der inhomogenen Gleichung bestimmen wir durch Variation der Konstanten: Wir setzen $u_p(x) = c(x)(1+2x)e^{2x}$ in (1) ein und erhalten

$$c'(x)(1+2x)e^{2x} = -\frac{4}{1+2x}e^{2x}\,,$$

woraus wir

$$c(x) = -\int \frac{4}{(1+2x)^2}\,dx = \frac{2}{1+2x}$$

bestimmen (die Integrationskonstante wählen wir zu Null). Damit erhalten wir die allgemeine Lösung

$$u(x) = u_h(x) + u_p(x) = c(1+2x)e^{2x} + 2e^{2x}\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,,$$

mit $c \in \mathbb{R}$ für u. Mit Hilfe von partieller Integration erhalten wir nun

$$v(x) = \int u(x)\,dx = cxe^{2x} + d + e^{2x}\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,,$$

mit einer weiteren Konstanten $d \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$y(x) = v(x)e^{-x} = cxe^{x} + de^{-x} + e^{x}\,, \quad x > -\frac{1}{2}\,,$$

mit $c, d \in \mathbb{R}$ die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

Aufgabe 2 (8+12=20 Punkte)

(a) Berechnen Sie die ersten fünf Koeffizienten $a_0, \ldots, a_4$ der Potenzreihendarstellung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad a_k \in \mathbb{R} \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\,,$$

der Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(x) + 2xy'(x) - y(x) = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y(0) = 1\,, \quad y'(0) = 0\,.$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) + 4y''(x) + 6y'(x) + 4y(x) = -40\sin(2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Hinweis: Eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms der homogenen Gleichung ist gegeben durch -2.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

(a) Einsetzen von

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k\,,$$
$$2xy'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2ka_k x^k$$

liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \big[(k+2)(k+1)a_{k+2} + (2k-1)a_k\big]x^k = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir die Rekursionsformel

$$a_{k+2} = \frac{1-2k}{(k+2)(k+1)}a_k\,, \quad k \in \mathbb{N}_0\,.$$

Die Anfangsbedingungen liefern $a_0 = y(0) = 1$ und $a_1 = y'(0) = 0$. Aus der Rekursionsformel folgen nun

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}\,, \\ a_3 &= \frac{-a_1}{6} = 0\,, \\ a_4 &= \frac{-3a_2}{12} = -\frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

Alternative Lösung: Die Koeffizienten können auch anhand der Formel $a_k = \frac{y^{(k)}(0)}{k!}$, $k \in \mathbb{N}_0$, berechnet werden, wobei $y^{(k)}(0)$ durch Ableiten der Differentialgleichung gewonnen werden kann für $k > 2$. Es gilt

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) + 2xy''(x) + y'(x) &= 0\,, \\ y^{(4)}(x) + 2xy^{(3)}(x) + 3y''(x) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} y(0) &= 1\,, \\ y'(0) &= 0\,, \\ y''(0) &= y(0) = 1\,, \\ y^{(3)} &= y'(0) = 0\,, \\ y^{(4)} &= -3y''(0) = -3 \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{y(0)}{0!} = 1\,, \\ a_1 &= \frac{y'(0)}{1!} = 0\,, \\ a_2 &= \frac{y''(0)}{2!} = \frac{1}{2}\,, \\ a_3 &= \frac{y^{(3)}(0)}{3!} = 0\,, \\ a_4 &= \frac{y''^{(4)}(0)}{4!} = -\frac{1}{8}\,. \end{aligned}$$

(b) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom p der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 6\lambda + 4$$

und hat nach dem Hinweis die Nullstelle -2. Mit Hilfe von Polynomdivision können wir es in der Form

$$p(\lambda) = (\lambda + 2)(\lambda^2 + 2\lambda + 2)$$

schreiben und sehen, dass p genau die Nullstellen -2 und $-1 \pm i$ besitzt (jeweils mit Vielfachheit eins). Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \sin(x) + c_3 e^{-x} \cos(x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = a \sin(2x) + b \cos(2x)\,, \quad x \in \mathbb{R} \text{ mit } a \in \mathbb{R}\,.$$

Wir berechnen die Ableitungen zu

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= 2a\cos(2x) - 2b\sin(2x)\,, \\ y_p''(x) &= -4a\sin(2x) - 4b\cos(2x)\,, \\ y_p'''(x) &= -8a\cos(2x) + 8b\sin(2x) \end{aligned}$$

und Einsetzen führt auf

$$-(12a+4b)\sin(2x) + (4a-12b)\cos(2x) \overset{!}{=} -40\sin(2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

woraus wir durch Koeffizientenvergleich die Bedingungen $a-3b=0$ und $3a+b=10$ erhalten. Diese haben die Lösung $a=3, b=1$. Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}\sin(x) + c_3 e^{-x}\cos(x) + 3\sin(2x) + \cos(2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (10+10=20 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Matrixexponentialfunktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 4t \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei A die Matrix aus (a) ist.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

(a) Wir zerlegen $A = D + N$ mit

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$DN = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND$$

und somit $e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Da D eine Diagonalmatrix ist, erhalten wir

$$e^{tD} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Weiter gilt wegen $N^2 = 0$ die Identität

$$e^{tN} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I + tN = \begin{pmatrix} 1 & 2t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Somit erhalten wir

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Alternative Lösung: Das charakteristische Polynom berechnen wir zu

$$\det(A - \lambda I) = (2 + \lambda)^2 (3 - \lambda)\,,$$

d. h. die Eigenwerte lauten 3 und -2, mit zugehörigen algebraischen Vielfachheiten 1 bzw. 2 (da es sich um eine Dreiecksmatrix handelt, können die Eigenwerte direkt auf der Diagonalen abgelesen werden). Die Eigenräume ergeben sich zu

$$\operatorname{Kern}(A - 3I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\operatorname{Kern}(A + 2I) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit erhalten wir die Lösungen

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\phi}_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t),\ t \in \mathbb{R}$. Um eine dritte linear unabhängige Lösung zu erhalten, ergänzen wir die gewählte Basis von $\operatorname{Kern}(A + 2I)$ zu einer Basis des Hauptraums zum Eigenwert -2. Es gilt

$$\operatorname{Kern}(A + 2I)^2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \end{pmatrix} = \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dabei wurde der neue Basisvektor zweckmäßigerweise so gewählt, dass

$$(A + 2I) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der neue Basisvektor führt zu

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{-2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t(A + 2I) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right) = e^{-2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Damit bilden $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3$ ein Fundamentalsystem $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \vec{\phi}_1(t) & \vec{\phi}_2(t) & \vec{\phi}_3(t) \end{pmatrix}$ für $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)$. Wir berechnen

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir verwenden die Variation-der-Konstanten-Formel sowie partielle Integration und erhalten

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= e^{tA}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\begin{pmatrix} 4\tau \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 2te^{-2t} \\ e^{-2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \int_0^t \begin{pmatrix} 4\tau e^{2\tau} \\ 0 \\ -6e^{-3\tau} \end{pmatrix} d\tau \\
&= \begin{pmatrix} 2te^{-2t} \\ e^{-2t} \\ e^{3t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{-2t} & 2te^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2te^{2t} - e^{2t} + 1 \\ 0 \\ 2e^{-3t} - 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2te^{-2t} + 2t - 1 + e^{-2t} \\ e^{-2t} \\ -e^{3t} + 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10+10=20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Lösung von

$$\begin{aligned}
\left(1 + 3y^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) &= \cos(y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \\
u(x,0) &= x^2, \quad x \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens. Bestätigen Sie durch eine Probe, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt.

(b) Bestimmen Sie für das Randwertproblem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= 0, \quad x \in (0,1),\ t > 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= 0, \quad t > 0,
\end{aligned}$$

alle Lösungen der Form $u(x,t) = e^{\mu^2 t}w(x)$, $x \in [0,1], t \geq 0$, wobei $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $w : [0,1] \to \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

(a) Wir definieren die Funktionen $\vec{a} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch

$$\vec{a}(x,y,u) = \begin{pmatrix} 1 + 3y^2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x,y,u) = \cos(y).$$

Die vorliegende quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung nimmt dann die Form

$$\vec{a}(x,y,u) \cdot \nabla_{(x,y)}u(x,y) = b(x,y,u), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

an. Die Anfangswerte sind auf der x-Achse $\Gamma := \{(\xi, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \xi \in \mathbb{R}\}$ durch $f(\xi) = \xi^2$ vorgegeben. Das charakteristische System lautet

$$\vec{k}\,'(s) = \vec{a}\left(\vec{k}(s), w(s)\right) = \begin{pmatrix} 1 + 3k_2(s)^2 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$w'(s) = b\left(\vec{k}(s), w(s)\right) = \cos(k_2(s))$$

mit Anfangswerten

$$\vec{k}(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$w(0) = f(\xi) = \xi^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$, wobei s aus einem geeigneten Intervall I ist. Die Lösung für k_2 lautet $k_2(s, \xi) = s$, was eingesetzt in die Differentialgleichung für k_1 zu $k_1'(s) = 1 + 3s^2$ führt. Die Lösung zur Anfangsbedingung $k_1(0) = \xi$ lautet $k_1(s, \xi) = s + s^3 + \xi$. Weiter erhalten wir $w(s, \xi) = \sin(s) + \xi^2$ für alle $s \in I$.

Für jedes gegebenes $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{k}(s, \xi)$$

eindeutig nach s, ξ auflösbar mit Lösung $s = y, \xi = x - y - y^3$. Wir wählen also $I = \mathbb{R}$. Einsetzen liefert die Funktion

$$u(x, y) = w(s, \xi) = \sin(y) + \left(x - y - y^3\right)^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

als Kandidaten für eine Lösung des Problems. Dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt, sehen wir durch die Probe

$$\left(1 + 3y^2\right) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) =$$
$$\left(1 + 3y^2\right) 2\left(x - y - y^3\right) + \cos(y) + 2\left(x - y - y^3\right)\left(-1 - 3y^2\right) = \cos(y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

sowie

$$u(x, 0) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir betrachten zunächst die Differentialgleichung ohne Randbedingungen. Einsetzen liefert

$$\mu^2 e^{\mu^2 t} w(x) - e^{\mu^2 t} w''(x) = 0, \quad x \in (0, 1), \ t > 0$$

und wegen $e^{\mu^2 t} \neq 0$ daher

$$w''(x) = \mu^2 w(x), \quad x \in (0, 1). \tag{2}$$

Da nach Voraussetzung $\mu \neq 0$, ist ein komplexwertiges Fundamentalsystem für diese Differentialgleichung gegeben durch $e^{\mu x}, e^{-\mu x}$. Die allgemeine Lösung von (2) lautet also

$$w(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}, \quad x \in (0, 1),$$

mit Konstanten $a, b \in \mathbb{C}$. Wir setzen w auf $[0, 1]$ fort mit $w(x) = ae^{\mu x} + be^{-\mu x}, x \in [0, 1]$ und erhalten aus den beiden Randbedingungen die Gleichungen

$$\mu a - \mu b = 0, \tag{3}$$
$$\mu a e^{\mu} - \mu b e^{-\mu} = 0. \tag{4}$$

Aus (3) folgt wegen $\mu \neq 0$ die Identität $a = b$ und Einsetzen in (4) führt zu

$$e^{\mu} = e^{-\mu}\,,$$

was äquivalent zu $e^{2\mu} = 1$ ist. Damit muss 2μ ein ganzzahliges Vielfaches von $2\pi i$ sein. Also erhalten wir $\mu_k = k\pi i$ für $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ ($k = 0$ ist wegen $\mu \neq 0$ ausgeschlossen). Die zugehörigen Funktionen w_k sind für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gegeben durch

$$w_k(x) = a_k \left(e^{k\pi i x} + e^{-k\pi i x}\right) = 2a_k \cos(k\pi x)\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

wobei die Konstante a_k reell gewählt wird, da wir nach Aufgabenstellung reellwertige Funktionen w suchen. Insgesamt sind alle Lösungen des Randwertproblems, welche die gesuchte Form haben, gegeben durch

$$u_k(x,t) = a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x)\,, \quad x \in [0,1], t \geq 0\,,$$

wobei $k \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ (wir haben den Faktor 2 von oben in a_k hineingezogen und können uns auf $k \in \mathbb{N}$ beschränken, da k und $-k$ dieselbe Lösung liefern).

Bemerkung: Der Fall $\mu = 0$ würde zu konstanten Lösungen führen.