# Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
## Lösungsvorschlag zur Nachklausur

**Aufgabe 1** (10 + 10 = 20 Punkte).

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' + \frac{2x+1}{x^2+x}y + (2x+1)y^2 = 0,$$
$$y(1) = \frac{1}{2\log 2}$$

für alle $x > 0$.
*Hinweis: Bernoulli-Differentialgleichung.*

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$y' + x^2 y + xy^2 = -\frac{1}{2} - \frac{x^3}{4}$$
$$y(0) = 1$$

für alle $x \geq 0$.
*Hinweis: Die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x/2$ löst die obige Differentialgleichung.*

*Lösungsvorschlag.*

(a) Die Gleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit $g(x) = (2x+1)/(x^2+x)$, $h(x) = 2x + 1$ und $\alpha = 2$, wobei wir die Notation aus der Vorlesung verwenden. Nach der Vorlesung erfüllt die substituierte Variable $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$ die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' = \frac{2x+1}{x^2+x}z + 2x + 1.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist

$$z_h(x) = c\mathrm{e}^{\log(x^2+x)} = cx(x+1)$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Da $C(x) = \log(x^2+x) = \log x + \log(x+1)$ eine Stammfunktion von $(2x+1)(x^2+x)^{-1}$ ist, ist

$$z_p(x) = \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\cos x} = 1$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (Variation der Konstanten). Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung die Summe von $z_h$ und $z_p$, also

$$z(x) = x(x+1)(c + \log x + \log(x+1)).$$

Also ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$y(x) = z(x)^{-1} = \frac{1}{x(x+1)(c + \log x + \log(x+1))}.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $c = 0$, also ist die Lösung des Anfangswertproblems für alle $x > 0$ gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{x(x+1)(\log x + \log(x+1))}.$$

(b) Die gegebene Differentialgleichung ist eine Riccatische Differentialgleichung. Wir lösen also zunächst die Differentialgleichung

$$u' + \left(x^2 + 2\left(-\frac{x}{2}\right)x\right)u + xu = u' + xu^2 = 0.$$

Diese Bernoulli-Differentialgleichung lösen wir, indem wir die Gleichung

$$z' + (1-2)0z + (1-2)x = z' - x = 0$$

lösen. Wir erhalten $z(x) = x^2/2 + c$, also $u(x) = 2/(x^2 + 2c)^{-1}$ und somit

$$y(x) = u(x) + \varphi(x) = \frac{4 - x^3 - 2cx}{2x^2 + 4c}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung liefert $c = 1$. □

**Aufgabe 2** ((2 + 5 + 5) + 8 = 20 Punkte)**.**

(a) Gegeben sei

$$2y^2\left(2x^2 + y^2\right)\mathrm{d}x + xy\left(3x^2 + 5y^2\right)\mathrm{d}y = 0$$

auf $\mathbb{R}^2$.

(i) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

(ii) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x, y) = \mu(xy)$.

(iii) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

für $x > 0$.

*Lösungsvorschlag.*

(a) Wir setzen

$$P(x,y) = 2y^2\big(2x^2 + y^2\big)$$

und

$$Q(x,y) = xy\big(3x^2 + 5y^2\big).$$

(i) Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Gleichung genau dann exakt, wenn $\partial_y P = \partial_x Q$. Da

$$\begin{aligned}\partial_y P(x,y) &= 8y\big(x^2 + y^2\big)\\ &\neq y\big(9x^2 + 5y^2\big)\\ &= \partial_x Q(x,y)\end{aligned}$$

ist die Differentialgleichung nicht exakt.

(ii) Wir suchen so ein $\mu$ mit $\mu(x,y) = \mu(xy)$, dass

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x = \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

exakt ist. Daher benötigen wir

$$\begin{aligned}&\partial_y(\mu(x,y)P(x,y)) = \partial_x(\mu(x,y)Q(x,y))\\ \iff\ & x\mu'(xy)2y^2\big(2x^2 + y^2\big) + \mu(xy)8y\big(x^2 + y^2\big)\\ &\quad = y\mu'(xy)xy\big(3x^2 + 5y^2\big) + \mu(xy)y\big(9x^2 + 5y^2\big)\\ \iff\ & \mu'(xy)xy\big(x^2y - 3y^3\big) = \mu(xy)\big(x^2y - 3y^3\big),\end{aligned}$$

also ist $\mu(xy) = xy$ der gesuchte integrierende Faktor.

(iii) Es seien $\tilde{P} = \mu P$ und $\tilde{Q} = \mu Q$, also

$$\begin{aligned}\tilde{P}(x,y) &= xy2y^2\big(2x^2 + y^2\big)\\ &= 2xy^5 + 4x^3y^3\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{Q}(x,y) &= xyxy\big(3x^2 + 5y^2\big)\\ &= 5x^2y^4 + 3x^4y^2.\end{aligned}$$

Wir suchen so ein $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, dass $\partial_x F = \tilde{P}$ und $\partial_y F = \tilde{Q}$. Durch scharfes Hinsehen (oder Berechnen von Stammfunktionen) sehen wir, dass

$$F(x,y) = x^2y^5 + x^4y^3 = x^2y^3\big(x^2 + y^2\big).$$

Somit sind sämtliche Lösungen $y$ der Differentialgleichung in impliziter Form darstellbar durch

$$x^2y(x)^3\big(x^2y + (x)^2\big) = C$$

für $C \in \mathbb{R}$.

(b) Diese Differentialgleichung ist eine Eulersche Differentialgleichung. Daher substituieren wir $x = \mathrm{e}^t$ und $u(t) = y(\mathrm{e}^t)$. (Dies ist möglich, da wir nur eine Lösung für $x > 0$ suchen.) Somit gilt

$$\begin{aligned} u(t) &= y\big(\mathrm{e}^t\big) \\ u'(t) &= \mathrm{e}^t y'\big(\mathrm{e}^t\big) \\ u''(t) &= \mathrm{e}^t y'\big(\mathrm{e}^t\big) + \mathrm{e}^{2t} y''\big(\mathrm{e}^t\big) \end{aligned}$$

Die substituierte Gleichung ist also

$$u'' - 3u' + 2u = 0.$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 2$. Also wählen wir für die allgemeine Lösung

$$u(t) = c_1 \mathrm{e}^t + c_2 \mathrm{e}^{2t}$$

für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Eine Rücksubstitution ergibt

$$y(x) = c_1 x + c_2 x^2$$

für $x > 0$. (Tatsächlich ist dies auch eine Lösung für $x \leq 0$.) □

**Aufgabe 3** (7 + 13 = 20 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie, dass für $y_0 > 0$ eine eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{y(x)^2}{1 + y(x)}(\cos x + 1) \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

auf einem Intervall der Form $[0, t_0)$ existiert.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = Ay(x)$$

auf $\mathbb{R}$ sowie die spezielle Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = y_0$, wobei die Matrix $A$ und der Anfangswert $y_0$ gegeben seien durch

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Lösungsvorschlag.*

(a) Zunächst bemerken wir, dass der Nenner des Bruchs auf der rechten Seite immer größer als 1 bleibt: Damit der Nenner kleiner als 1 werden kann, muss $y(x_0) = 0$ für ein $x_0 > 0$. Da aber $y(0) = y_0 > 0$, muss also für ein $x < x_0$ gelten, dass $y'(x) < 0$. Wir nehmen an, dass $x_1$ das Infimum aller dieser $x$ ist. Da aber der zweite Faktor immer nicht-negativ ist und der erste nach Wahl von $x_1$ für $x < x_1$ auch nicht-negativ ist, kann dies nicht sein.

Wir nutzen den Satz für die globale Existenz, der aus dem Satz von Picard–Lindelöf folgt (Satz 2.5 im Skript). Hierzu sehen wir, dass

$$|y^2| \leq (1+y)^2 \iff \frac{y^2}{1+y} \leq 1+y$$

für alle $x > 0$ und $y > 0$. Somit existiert die maximale Lösung des Anfangswertproblems aus der Aufgabenstellung auf ganz $\mathbb{R}$.

(b) Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom der Matrix $A$:

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ 3 & 1-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 1+2\lambda & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ \lambda & -\lambda & \lambda \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda \det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -1-\lambda & -1-\lambda \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda(1+\lambda) \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda(1+\lambda) \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\lambda(1+\lambda)\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \lambda(1+\lambda)^2\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\lambda(1+\lambda)^2\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= -\lambda(1+\lambda)^2.
\end{aligned}
$$

Somit hat die Matrix den einfachen Eigenwert 0 und den doppelten Eigenwert $-1$. Zum Berechnen von Basen der Eigen- und Haupträume sehen wir

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \\
\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}
$$

und

$$
\operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.
$$

Somit erhalten wir die linear unabhängigen Lösungen

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(t) &= \mathrm{e}^{0t}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\varphi_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\varphi_3(t) &= \mathrm{e}^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \mathrm{e}^{-t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

also

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} -1 & -e^{-t} & -te^{-t} \\ 2 & e^{-t} & te^{-t} \\ 1 & e^{-t} & e^{-t} + te^{-t} \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet $\Phi(t)c$, wobei $c \in \mathbb{R}^3$. Die spezielle Lösung zum gegebenen Anfangswert ergibt sich durch Bestimmung des Vektors $c$ mithilfe der Gleichung $\Phi(0)c = y_0$, also in unserem Falle $c = (2, -3, 1)$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} + te^{-t} \\ e^{-t} - te^{-t} \\ -te^{-t} \end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Aufgabe 4** (10 + 10 = 20 Punkte).

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - 5u_x(x,t) &= \frac{2}{3}x(1-t) \\ u(x,0) &= \frac{1}{9}x^2 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) Finden Sie mithilfe eines Separationsansatzes eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) - xu(x,t) &= 0, \\ u(0,t) &= e^t \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

*Lösungsvorschlag.*

(a) Die gegebene Differentialgleichung ist eine lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir setzen also

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{9}x^2 \\ g(x,t) &= \frac{2}{3}x(1-t) \\ a &= -5. \end{aligned}$$

Dann ist die Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= f(x-ta) + \int_0^t g(x-(t-r)a, r)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{9}(x+5t)^2 + \int_0^t \frac{2}{3}(x+5(t-r))(1-r)\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{9}\big((x^2+10xt+25t^2) + (6xt-3xt^2-5t^3+15t^2)\big) \\
&= \frac{1}{9}\big(x^2+16xt-3xt^2+40t^2-5t^3\big).
\end{aligned}
$$

(b) Wir schreiben $u(x,t) = v(x)w(t)$ für zu bestimmende Funktionen $v$ und $w$. Dann lautet die Differentialgleichung

$$
\begin{aligned}
&v(x)w'(t) + 2v'(x)w(t) - xv(x)w(t) = 0 \\
&\iff \frac{w'(t)}{w(t)} = x - 2\frac{v'(x)}{v(x)}
\end{aligned}
$$

für alle $x, t \in \mathbb{R}$. Da $x$ und $t$ unabhängig ist, muss es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ geben, für die gilt

$$
\frac{w'(t)}{w(t)} = x - 2\frac{v'(x)}{v(t)} = c.
$$

Somit gilt $w(t) = c_1 \mathrm{e}^{ct}$ und, nach Lösen der linearen Differentialgleichung erster Ordnung in $v$, auch $v(t) = c_2 \mathrm{e}^{1/4x(x-2c)}$ für Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, also

$$
u(x,t) = c_1 c_2 \exp\Big(ct + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}cx\Big).
$$

Zur Bestimmung der Konstanten berechnen wir

$$
u(0,t) = c_1 c_2 \mathrm{e}^{ct},
$$

also $c_1 c_3 = 1$ und $c = 1$. Insgesamt folgt also

$$
u(x,t) = \exp\Big(t + \frac{1}{2}x\Big(\frac{1}{2}x - 1\Big)\Big). \qquad \square
$$