UNIVERSITÄT KARLSRUHE
MATHEMATISCHES INSTITUT I

Frühjahr 2005
09.03.2005

Diplom–Vorprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Gegeben sei der Bereich

$$B = \{z \mid \operatorname{Re} z \le 0\,,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le \pi\}.$$

a) Bilden Sie B mittels

$$\zeta(z) = e^z$$

in die ζ–Ebene ab, und skizzieren Sie $\zeta(B)$.

b) Bilden Sie nun B unter Verwendung von a) mittels

$$w(z) = \frac{e^z + i}{e^z - i}$$

ab, und skizzieren Sie ebenfalls $w(G)$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

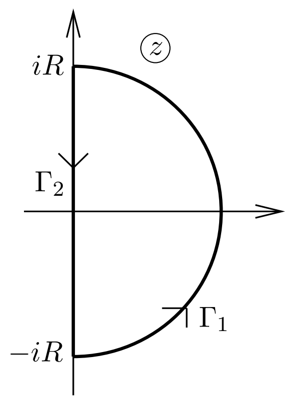
Für $R > 1$ sei Γ der positiv orientierte Rand des Gebietes

$$\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0\,,\ |z| < R\},$$

gemäss der Skizze ist also $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Weiter sei eine Funktion f durch

$$f(z) = \frac{(z-i)e^{-z}}{(z^2-1)^2}$$

gegeben.



a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz.$$

b) Begründen Sie, wieso

$$\lim_{R\to\infty} \oint_{\Gamma_1} f(z)dz = 0$$

ist.

c) Beweisen Sie mittels des Majorantenkriteriums die Konvergenz der Integrale

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-1)\cos t}{(t^2+1)^2}\,dt, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-1)\sin t}{(t^2+1)^2}\,dt.$$

d) Berechnen Sie die Werte von I_1 und I_2.

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{t^2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix},$$

und es sei $t > 0$.

a) Berechnen Sie aus dem System eine Differentialgleichung für $x_2(t)$ und bestimmen sie deren allgemeine Lösung für $t > 0$.

b) Bestimmen Sie damit $x_1(t)$ und die allgemeine Lösung $\vec{x}(t)$ des Systems.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem mit

$$\vec{x}(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' - 2xy' + 4y = x^2 + xe^{-x^2}, \quad y(0) = \frac{1}{2}, \quad y'(0) = 2\,.$$

a) Machen Sie für die Lösung $y(x)$ einen Potenzreihenansatz der Form

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

und leiten Sie für die c_k eine Rekursionsformel her.

(**Hinweis:** Entwickeln Sie die rechte Seite der Differentialgleichung in eine Potenzreihe um den Ursprung.)

b) Berechnen Sie die c_k für $k = 0, 1, \ldots, 5$.

c) Bestimmen Sie die c_{2j} für $j \geq 3$.

Viel Erfolg!

Hinweise für nach der Klausur:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Freitag, dem 25. März 2005, vor dem Sekretariat aus und liegen unter

`http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/~mi1/Schneider/HM/vd-f.html`

im Internet.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den 12. April 2005, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S 31 (Mathematikgebäude) statt.
Ort und Termin für alle übrigen werden noch bekanntgegeben.

Die Nachprüfungen selbst sind in der Woche vom 18. April bis 22. April 2005.