

Höhere Mathematik III

für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Diplom-Vorprüfung

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Es seien die Mengen $G_1 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $G_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2i| < 1\}$, sowie $G_3 = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} > 0\}$ und $G_4 = G_2 \cap G_3$ gegeben.

- Skizzieren Sie die Mengen G_1 , G_2 und G_3 .
- Bestimmen Sie die Möbiustransformation T , für die

$$T(i) = -1, \quad T(1 + 2i) = 1, \quad T(3i) = \infty.$$

gilt.

- Bestimmen Sie (mit Begründung) das Bild der Menge G_4 unter der Abbildung T .

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes die folgenden Integrale:

- $$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 - \cos t} dt,$$

- $$\int_{|z|=3} \frac{\cosh z}{\sinh z} dz.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(10x^2y + 2y^3) dx + (2x^3 + 10xy^2) dy = 0.$$

- Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung nicht exakt ist.
- Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu = \mu(x^2 + y^2)$.
- Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung in impliziter Form an.

– bitte wenden –

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'' = 3x^2y' + 9xy, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

- a) Machen Sie für die Lösung $y = y(x)$ einen Potenzreihenansatz der Form

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

und leiten Sie die Rekursionsformel

$$a_{n+3} = \frac{3}{n+2} a_n \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

für die Koeffizienten a_n her.

- b) Bestimmen Sie a_0, a_1, \dots, a_5 .

- c) Zeigen Sie:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls } n = 3k + 1 \text{ mit } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- d) Geben Sie die so gefundene Potenzreihe in expliziter Form an, und weisen Sie nach, dass diese das Anfangswertproblem löst.

Viel Erfolg!

Hinweise:

Die Ergebnisse der Vordiplomklausuren hängen ab Donnerstag, den 05.04.2007, vor dem Sekretariat (Zimmer 312, Kollegengebäude Mathematik) aus und können im Internet unter

<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/user/mi1/Schneider/HM/vd-f.html>

abgerufen werden.

Die Klausureinsicht findet für diejenigen, die sich einer mündlichen Nachprüfung stellen müssen, am Dienstag, den 17. April 2007, von 13.15 bis 13.45 Uhr im Seminarraum S31 (Kollegengebäude Mathematik) statt.

Die Nachprüfungen selbst finden in der Woche vom 23.04.2007 bis 27.04.2007 statt.

Die allgemeine Klausureinsicht ist am Mittwoch, den 02.05.2007, von 15.45 bis 17.15 im Seminarraum S34 (Kollegengebäude Mathematik).