Aufgabe 1

a) Da der Integrand, den wir f nennen, nur isolierte Singularitäten besitzt und außerhalb derer holomorph ist, sind alle Voraussetzungen zur Anwendung des Residuensatzes erfüllt. Der Nenner von f hat die Nullstellen

$$z_1 = -1, \qquad z_2 = 0, \qquad z_3 = 1,$$

alle liegen echt innerhalb der Kreislinie mit Radius 2. Laut Residuensatz gilt dann

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{3} \operatorname{Res}(f; z_j).$$

z_1 ist einfache Nullstelle des Nenners, der Zähler von f verschwindet bei z_1 nicht. Deshalb besitzt f dort einen Pol erster Ordnung. Schreibe

$$f(z) = \frac{g(z)}{z+1}, \qquad g(z) = \frac{z^3 - 2z + 1}{z^2(z-1)}, \qquad g(z_1) = g(-1) = -1.$$

Laut Satz 7.5 aus der Vorlesung gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{g(z_1)}{(z+1)'|_{z=-1}} = g(-1) = -1.$$

z_2 ist doppelte Nullstelle des Nenners, der Zähler verschwindet bei z_2 nicht. f besitzt bei z_2 also eine Polstelle zweiter Ordnung. Wiederum Satz 7.5 liefert

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f; z_2) &= \lim_{z \longrightarrow z_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^2 f(z)) = \lim_{z \longrightarrow 0} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \frac{z^3 - 2z + 1}{z^2 - 1} \\
&= \lim_{z \to 0} \left(\frac{3z^2 - 2}{z^2 - 1} - \frac{(z^3 - 2z + 1)2z}{(z^2 - 1)^2} \right) = 2.
\end{aligned}$$

z_3 ist jeweils einfache Nullstelle von Zähler und Nenner. Division liefert

$$f(z) = \frac{z^2 + z - 1}{z^2(z+1)}.$$

Damit ist die Singularität bei z_3 hebbar, $\operatorname{Res}(f; z_3) = 0$. Insgesamt also

$$\oint_{|z|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}(-1+2) = 2\pi\mathrm{i}.$$

b) Die Nullstelle des Nenners, $z = 4$, liegt echt außerhalb des von der Integrationskurve umschlossenen Gebietes, die Singularität des ersten Summanden des Zählers, $z = -3$, liegt auch echt außerhalb des von der Integrationskurve umschlossenen Gebietes. Für den zweiten Summanden des Zählers gilt

$$z^{\sin(\pi z)} = \exp(\operatorname{Log}(z)(\sin(\pi z))).$$

Der Hauptzweig des Logarithmus, Log, ist auf $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$ definiert und dort holomorph. Damit ist der gesamte Integrand auf einer offenen, einfach zusammenhängenden Umgebung der Integrationskurve, z.B. auf $\{|z-2| < 2\}$, holomorph. Laut Cauchy-Integralsatz verschwindet das Integral.

Aufgabe 2
a) Siehe Skizze 1 für eine Skizze von G.

Um $T(G)$ zu bestimmen, untersuchen wir zunächst, wohin T die Ränder von G, nämlich ∂G_1 und ∂G_2, abbildet. Es gilt $1 \in \partial G_1 \cap \partial G_2$ und $T(1) = \infty$. Da Möbiustransformationen Kreise entweder auf Kreise oder auf Geraden abbilden und ∞ auf jeder Geraden und auf keinem Kreis liegt, müssen $T(\partial G_1)$ und $T(\partial G_2)$ Geraden sein. Es genügt also, jeweils zwei Bildpunkte auszurechnen und die sie verbindende Gerade zu bestimmen.

Es gilt $-1, \mathrm{i} \in \partial G_1$ und
$$T(-1) = 0, \qquad T(\mathrm{i}) = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$$
Damit gilt $T(\partial G_1) = \mathrm{i}\mathbb{R}$. Ferner gilt $0, \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2} \in \partial G_2$ und
$$T(0) = 1, \qquad T\left(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\right) = \frac{3/2 + \mathrm{i}/2}{1/2 - \mathrm{i}/2} = 1 + 2\mathrm{i},$$
und es folgt
$$T(\partial G_2) = \{z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} \mid x = 1\}.$$
Da Möbiustransformationen Ränder auf Ränder abbilden, bleibt zu untersuchen, wohin T das Innere von G abbildet. Es gilt z.B. $T(-1/2) = 1/3$. Es folgt
$$T(G) = \{z = x + \mathrm{i}y \mid 0 < x < 1\},$$
siehe Skizze 2.

b) Setze
$$z_1 = -1, \quad z_2 = 0, \quad z_3 = \infty, \qquad w_1 = -1, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = \mathrm{i}.$$
Wir benutzen die Invarianz des Doppelverhältnisses mit $z_3 = \infty$, Satz 4.7b):
$$\frac{z - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{w - w_1}{w - w_3} \cdot \frac{w_2 - w_3}{w_2 - w_1}.$$
Eingesetzt heißt das
$$(*) \qquad z + 1 = \frac{w+1}{w-\mathrm{i}} \cdot \frac{1-\mathrm{i}}{2}.$$
Nach w aufgelöst ergibt sich die gesuchte Möbiustransformation zu
$$S(z) = w = \frac{(\mathrm{i}-1)z + \mathrm{i}}{(\mathrm{i}+1)z + \mathrm{i}}.$$
Löst man in $(*)$ nach z auf, ergibt sich die Inverse:
$$S^{-1}(w) = z = \frac{w+1}{w-\mathrm{i}} \cdot \frac{1-\mathrm{i}}{2} - 1 = \frac{(-1-\mathrm{i})w + (\mathrm{i}+1)}{2w - 2\mathrm{i}}.$$
Achtung: S ist keinesfalls eindeutig.

Aufgabe 3
Die gegebene Form der Gleichung legt den Versuch nahe, sie mit Hilfe eines Potentials zu lösen. Setze

$$P(x,y) = \frac{y}{x} - e^{x^2}, \qquad Q(x,y) = 1,$$

dann gilt

$$P_y(x,y) = \frac{1}{x}, \qquad Q_x(x,y) = 0,$$

weshalb die Gleichung nicht exakt ist. Es gilt jedoch

$$\frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)} = \frac{1}{x},$$

weshalb man laut Abschnitt 23.9 der Vorlesung einen integrierenden Faktor $\mu = \mu(x)$ finden kann, indem man die Gleichung

$$\mu'(x) = \frac{P_y(x,y) - Q_x(x,y)}{Q(x,y)}\mu(x) = \frac{1}{x}\,\mu(x)$$

löst. Eine Lösung davon ist

$$\mu(x) = \exp\left(\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right) = \exp(\log x) = x,$$

d.h. $\mu(x) = x$ ist integrierender Faktor der Gleichung. Multipliziere die Gleichung mit μ, erhalte die exakte Gleichung

$$(y - xe^{x^2})\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y = 0.$$

Setze

$$A(x,y) = y - xe^{x^2}, \qquad B(x,y) = x.$$

Nun suchen wir ein Potential $F : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es soll $F_x(x,y) = A(x,y)$ gelten. Integration bzgl. x liefert

$$F(x,y) = xy - \frac{e^{x^2}}{2} + c(y),$$

mit einer Funktion $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Die Forderung $F_y(x,y) = B(x,y)$ führt zu $c'(y) = 0$ und damit $c(y) = K$ mit $K \in \mathbb{R}$. Die Lösungen der exakten Gleichung und, da $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ einfach zusammenhängend ist, für $x > 0$ auch die Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind implizit gegeben durch die Niveaulinien des Potentials, also durch

$$F(x,y) = xy - \frac{e^{x^2}}{2} = C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Für $x > 0$ kann man das eindeutig nach $y = y(x)$ auflösen zu

$$y(x) = \frac{C + \frac{e^{x^2}}{2}}{x}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Dies sind alle Lösungen der Gleichung in expliziter Form. Sie existieren jeweils maximal auf dem Intervall $(0,\infty)$. Für die Lösung durch den Punkt $(1,e)$ muss man $C = e/2$ wählen.

Aufgabe 4

a) Dies ist eine lineare Gleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Wir lösen sie wie in Abschnitt 23.11 der Vorlesung. Das zugehörige charakteristische Polynom lautet $\lambda^2 - 2\lambda + 4$ mit den Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = 1 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Die allgemeine Lösung hat nun die Form

$$y(x) = Ae^x \cos(\sqrt{3}x) + Be^x \sin(\sqrt{3}x), \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

b) Um den Ansatz in die Gleichung einsetzen zu können, bestimmen wir die auftretenden Terme:

$$-xy'(x) = -x \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} = -\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = -\sum_{n=0}^{\infty} na_n x^n$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$$

Es gilt dann

$$y'' - xy' - y = \sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - na_n - a_n)x^n.$$

Dieser Ausdruck soll identisch Null sein, d.h. alle Koeffizienten müssen verschwinden. Es ergibt sich die Rekursionsformel

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}, \qquad n \geq 0.$$

Ein Anfangswert ist $y(0) = 1$. Einsetzen ergibt $y(0) = a_0$ und damit $a_0 = 1$. Teste die ersten geraden Folgenglieder,

$$a_2 = \frac{1}{2}, \qquad a_4 = \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2^2 \cdot 2!}, \qquad a_6 = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{2^3 \cdot 3!}.$$

Dies legt die Vermutung nahe, dass

$$a_{2n} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \qquad \text{für alle } n \geq 0.$$

Wir beweisen das mit vollständiger Induktion. Der Anfang ist schon erledigt. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Aussage für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt und rechnen

$$a_{2k+2} = \frac{a_{2k}}{2k+2} = \frac{1}{(2k+2)2^k k!} = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)!},$$

womit die Vermutung bewiesen wäre. Ferner führt der Anfangswert $y'(0) = 0$ zu $a_1 = 0$ und damit zu

$$a_{2n+1} = 0 \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Diese Koeffizienten in den Ansatz eingesetzt, ergibt die Lösung des AWP,

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2/2)^n}{n!} = e^{x^2/2}.$$