KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2012/2013
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Markus Antoni

Bachelor – Modulprüfung

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Dies ist eine Bernoulli'sche Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Die Substitution

$$z(x) := y(x)^{1-\alpha} = y(x)^{-1}$$

führt dann auf die lineare Differentialgleichung

$$z'(x) + (1-\alpha)\frac{x}{1+x^2}z(x) + (1-\alpha)x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z'(x) = \frac{x}{1+x^2}z(x) + x.$$

Die zugehörige homogene Gleichung hat hier die allgemeine Lösung

$$z_{\text{hom}}(x) = c\exp\left(\int \tfrac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) = c\exp\left(\tfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right) = c\sqrt{1+x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung einer speziellen Lösung verwenden wir Variation der Konstanten, d.h. wir machen den Ansatz $z_{\text{p}}(x) = c(x)\sqrt{1+x^2}$. Einsetzen in die inhomogene Gleichung liefert

$$c'(x)\sqrt{1+x^2} = x \qquad \Longleftrightarrow \qquad c'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c(x) = \sqrt{1+x^2} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Also erhalten wir eine spezielle Lösung durch $z_{\text{p}}(x) = 1 + x^2$ und damit die allgemeine Lösung

$$z(x) = 1 + x^2 + c\sqrt{1+x^2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Rücksubstitution führt nun auf

$$y(x) = z(x)^{-1} = \frac{1}{1+x^2+c\sqrt{1+x^2}}, \quad c \in \mathbb{R},$$

und Einsetzen des Anfangswertes liefert

$$y(0) = \frac{1}{1+c} \overset{!}{=} \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad c = 1.$$

Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir somit

$$y(x) = \frac{1}{1+x^2+\sqrt{1+x^2}}.$$

b) Setzen wir hier $P(x,y) := 1 + 2x^2$ und $Q(x,y) := 2xy$, so gilt

$$\partial_y P(x,y) = 0 \neq 2y = \partial_x Q(x,y),$$

also ist die Differentialgleichung nicht exakt. Multiplikation mit dem integrierenden Faktor $\mu(x,y) = u(x^2+y^2)$ und anschließendem Ableiten führt auf

$$\partial_y\big(\mu(x,y)P(x,y)\big) = 2yu'(x^2+y^2)(1+2x^2) + u(x^2+y^2)\cdot 0 = (2y+4x^2y)u'(x^2+y^2),$$
$$\partial_x\big(\mu(x,y)Q(x,y)\big) = 2xu'(x^2+y^2)2xy + u(x^2+y^2)2y = 4x^2yu'(x^2+y^2) + 2yu(x^2+y^2).$$

Setzen wir dies gleich, so folgt

$$u'(x^2+y^2) = u(x^2+y^2) \quad \overset{t:=x^2+y^2}{\iff} \quad u'(t) = u(t).$$

Eine Lösung dieser Differentialgleichung ist $u(t) = e^t$. Damit erhalten wir den integrierenden Faktor

$$\mu(x,y) = u(x^2+y^2) = e^{x^2+y^2},$$

sowie die exakte Differentialgleichung

$$(1+2x^2)e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + 2xye^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y = 0.$$

Als Nächstes bestimmen wir nun eine Stammfunktion zu $(\mu P, \mu Q)$. Integrieren wir zunächst die zweite Funktion bezüglich y (das ist hier die offensichtlich leichtere Variante), so folgt

$$F(x,y) = \int \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y + c(x) = xe^{x^2+y^2} + c(x).$$

Anschließendes Ableiten nach x führt dann auf

$$\partial_x F(x,y) = e^{x^2+y^2} + 2x^2e^{x^2+y^2} + c'(x) \overset{!}{=} \mu(x,y)P(x,y) = (1+2x^2)e^{x^2+y^2}$$
$$\iff \quad c'(x) = 0 \quad \iff \quad c(x) = d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Eine Stammfunktion ist also

$$F(x,y) = xe^{x^2+y^2},$$

und wir erhalten als allgemeine Lösung

$$xe^{x^2+y(x)^2} = c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2

a) Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dieser führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 2\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2(\lambda-i)(\lambda+i)$$

mit der doppelten Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und den beiden komplexen Nullstellen $\lambda_{2/3} = \pm i$. Damit ist die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung gegeben durch

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3\cos(x) + c_4\sin(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Für eine spezielle Lösung machen wir nun einen Ansatz vom Typ der rechten Seite. Da $\sigma + i\omega = 0 + i \cdot 1 = i$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, machen wir den Ansatz

$$y_{\mathrm{p}}(x) = ax\cos(x) + bx\sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Hier haben wir die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{p}}'(x) &= (a + bx)\cos(x) + (b - ax)\sin(x), \\ y_{\mathrm{p}}''(x) &= (2b - ax)\cos(x) + (-2a - bx)\sin(x), \\ y_{\mathrm{p}}'''(x) &= (-3a - bx)\cos(x) + (-3b + ax)\sin(x), \\ y_{\mathrm{p}}^{(4)}(x) &= (-4b + ax)\cos(x) + (4a + bx)\sin(x). \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so folgt

$$\begin{aligned} & y_{\mathrm{p}}^{(4)} + 2y_{\mathrm{p}}''' + 2y_{\mathrm{p}}'' + 2y_{\mathrm{p}}' + y_{\mathrm{p}} = -4a\cos(x) - 4b\sin(x) \overset{!}{=} \sin(x) \\ \iff \quad & a = 0, \; b = -\tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit die spezielle Lösung $y_{\mathrm{p}}(x) = -\frac{1}{4}x\sin(x)$, sowie die allgemeine Lösung

$$y(x) = -\tfrac{1}{4}x\sin(x) + c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3\cos(x) + c_4\sin(x), \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}.$$

b) Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

mit

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \quad \text{und} \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$$

führt auf

$$y''(x) + xy'(x) - 3y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k - 3\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Weiter gilt

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} \overset{\ell = k-2}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+2)(\ell+1)a_{\ell+2}x^{\ell} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k.$$

Setzen wir dies zusammen, so folgt

$$\begin{aligned} y''(x) + xy'(x) - 3y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k + \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k - 3\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \big((k+2)(k+1)a_{k+2} + (k-3)a_k\big)x^k \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$\iff \quad (k+2)(k+1)a_{k+2} + (k-3)a_k = 0, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0,$$

$$\iff \quad a_{k+2} = \frac{3-k}{(k+2)(k+1)} a_k, \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

Mit den Anfangswerten folgt $a_0 = 0$ und $a_1 = 3$. Laut Rekursionsvorschrift folgt damit

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{3}{2} \cdot a_0 = 0, \quad \text{und damit: } a_k = 0 \quad \text{für alle geraden } k \in \mathbb{N}. \\
a_3 &= \frac{1}{3} \cdot a_1 = 1, \\
a_4 &= 0 \qquad \text{(siehe oben)} \\
a_5 &= 0 \cdot a_3 = 0, \quad \text{und damit erneut: } a_k = 0 \quad \text{für alle ungeraden } k \geqslant 5.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir $a_1 = 3$, $a_3 = 1$ und $a_k = 0$ für $k \neq 1, 3$. Dies führt auf die Lösung

$$y(x) = x^3 + 3x.$$

Aufgabe 3

a) Zur Berechnung von e^{tA} berechnen wir zunächst die Eigenwerte und Eigenräume von A. Das charakteristische Polynom der Matrix ist

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) - 6 - 2 + 4 - 2\lambda + 4 + 2\lambda + 3(1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(2-\lambda)(-2-\lambda) + 3(1-\lambda) = (1-\lambda)(-4 + \lambda^2 + 3) \\
&= -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 1) = -(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2.
\end{aligned}$$

Also haben wir den einfachen Eigenwert $\lambda_1 = -1$ und den doppelten Eigenwert $\lambda_2 = 1$. Die zugehörigen Eigenräume sind dann gegeben durch

$$\begin{aligned}
\operatorname{Kern}(A + I) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \\
\operatorname{Kern}(A - I) &= \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

Insbesondere ist A also nicht diagonalisierbar, d.h. zur Vervollständigung eines Fundamentalsystems benötigen wir noch

$$\operatorname{Kern}(A - I)^2 = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\vec{\phi}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] = e^{t}\begin{pmatrix}1\\t\\t\end{pmatrix},$$

bzw.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}e^{-t} & 0 & e^{t}\\ 0 & e^{t} & te^{t}\\ e^{-t} & e^{t} & te^{t}\end{pmatrix}.$$

Mit

$$\Phi(0) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad \text{folgt} \quad \Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Dies führt schließlich auf

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix}e^{t} & e^{t}-e^{-t} & e^{-t}-e^{t}\\ te^{t} & (1+t)e^{t} & -te^{t}\\ te^{t} & (1+t)e^{t}-e^{-t} & e^{-t}-te^{t}\end{pmatrix}.$$

b) Die Lösung des Anfangswertpoblems ergibt sich nun mit der Formel

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}(0) + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{mit} \quad \vec{b}(s) := \begin{pmatrix}1\\s\\s\end{pmatrix}.$$

Wir berechnen zunächst das Integral. Hier erhalten wir

$$\int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix}e^{t-s}\\ te^{t-s}\\ te^{t-s}\end{pmatrix}\mathrm{d}s = \begin{pmatrix}[-e^{t-s}]_{s=0}^{t}\\ [-te^{t-s}]_{s=0}^{t}\\ [-te^{t-s}]_{s=0}^{t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{t}-1\\ te^{t}-t\\ te^{t}-t\end{pmatrix}.$$

Oder alternativ:

$$\int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = e^{tA}\int_0^t e^{-sA}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = e^{tA}\int_0^t \begin{pmatrix}e^{-s}\\0\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}s = e^{tA}\begin{pmatrix}1-e^{-t}\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}e^{t}-1\\ te^{t}-t\\ te^{t}-t\end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir schließlich als Lösung

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \begin{pmatrix}e^{-t}\\0\\e^{-t}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e^{t}-1\\ te^{t}-t\\ te^{t}-t\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{-t}+e^{t}-1\\ te^{t}-t\\ e^{-t}+te^{t}-t\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Das charakteristische System dieser Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= 1, \quad k_1(0) = 0, \\ k_2'(s) &= k_1(s)\big(1 + k_2(s)\big), \quad k_2(0) = \xi, \\ w'(s) &= k_1(s)w(s), \quad w(0) = \frac{1}{1+\xi}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der ersten Gleichung ist

$$k_1(s) = s + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$

und der Anfangswert liefert noch $c_1 = 0$, d.h.

$$k_1(s) = s.$$

Für die zweite Gleichung erhalten wir somit $k_2'(s) = s\big(1 + k_2(s)\big) = sk_2(s) + s$, deren zugehörige homogene Gleichung die allgemeine Lösung

$$k_{2,\mathrm{hom}}(s) = c\exp\big(\textstyle\int s\,\mathrm{d}s\big) = ce^{\frac{1}{2}s^2}, \quad c \in \mathbb{R},$$

besitzt. Mittels Variation der Konstanten bestimmen wir noch eine spezielle Lösung. Der Ansatz $k_{2,\mathrm{p}}(s) = c(s)e^{\frac{1}{2}s^2}$ führt dann auf

$$c'(s)e^{\frac{1}{2}s^2} = s \iff c'(s) = se^{-\frac{1}{2}s^2} \iff c(s) = -e^{-\frac{1}{2}s^2} + d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten daraus $k_{2,\mathrm{p}}(s) = -1$ als spezielle Lösung und damit die allgemeine Lösung

$$k_2(s) = -1 + ce^{\frac{1}{2}s^2}, c \in \mathbb{R}.$$

Alternativ können wir auch $v(s) := 1 + k_2(s)$ setzen und erhalten daraus die Differentialgleichung

$$v'(s) = k_2'(s) = s\big(1 + k_2(s)\big) = sv(s)$$

mit der allgemeinen Lösung $v(s) = ce^{\frac{1}{2}s^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution liefert dann wie auch oben

$$k_2(s) = -1 + ce^{\frac{1}{2}s^2}, c \in \mathbb{R}.$$

Setzen wir nun noch den Anfangswert ein, so folgt

$$k_2(0) = -1 + c \stackrel{!}{=} \xi \qquad \iff \qquad c = 1 + \xi,$$

sowie

$$k_2(s) = -1 + (1 + \xi)e^{\frac{1}{2}s^2}.$$

Für w erhalten wir die Differentialgleichung $w'(s) = sw(s)$, welche wieder die allgemeine Lösung $w(s) = ce^{\frac{1}{2}s^2}$ hat. Mit dem Anfangswert folgt hier $c = \frac{1}{1+\xi}$ und damit

$$w(s) = \frac{1}{1+\xi}e^{\frac{1}{2}s^2}.$$

Für die Grundcharakteristiken gilt nun

$$\begin{pmatrix} k_1(s,\xi) \\ k_2(s,\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \iff s = x,\ -1+(1+\xi)e^{\frac{1}{2}s^2} = t$$
$$\iff s = x,\ \xi = -1+(1+t)e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Setzen wir dies ein, so erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = w(s,\xi) = \frac{1}{(1+t)e^{-\frac{1}{2}x^2}} e^{\frac{1}{2}x^2} = \frac{e^{x^2}}{1+t}.$$

b) Machen wir den Ansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$, so können wir $v = 0$ oder $w = 0$ ausschließen, da sonst die Anfangsbedingung nicht erfüllt ist. Damit folgt außerdem

$$v'(x)w(t) + x(1+t)v(x)w'(t) = xv(x)w(t) \iff (1+t)\frac{w'(t)}{w(t)} = 1 - \frac{v'(x)}{xv(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t und die rechte nur von x abhängt, beide Seiten aber für alle $(x,t) \in D$ übereinstimmen, hängen beide Ausdrücke weder von x noch von t ab. Also existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$(1+t)\frac{w'(t)}{w(t)} = \lambda = 1 - \frac{v'(x)}{xv(x)}.$$

Daraus ergeben sich die beiden Differentialgleichungen

$$v'(x) = (1-\lambda)xv(x),$$
$$w'(t) = \frac{\lambda}{1+t}w(t),$$

mit den allgemeinen Lösungen

$$v(x) = c_1 e^{\frac{1}{2}(1-\lambda)x^2}, \quad c_1 \in \mathbb{R},$$
$$w(t) = c_2 e^{\lambda \ln(1+t)} = c_2(1+t)^\lambda, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Aus der Nebenbedingung folgt

$$u(0,t) = v(0)w(t) = c_1c_2(1+t)^\lambda \stackrel{!}{=} \frac{1}{1+t} \iff \lambda = -1,\ c_1c_2 = 1.$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = v(x)w(t) = \frac{e^{x^2}}{1+t}.$$

Anmerkung: Ausgehend von dem Separationsansatz $u(x,t) = v(x)w(t)$ können wir diesen auch zuerst in die Anfangsbedingung einsetzen und erhalten daraus

$$u(0,t) = v(0)w(t) = \frac{1}{1+t} \iff w(t) = \frac{1}{v(0)(1+t)}.$$

Setzen wir dies nun in die Differentialgleichung ein, so folgt

$$v'(x)\frac{1}{v(0)(1+t)} - x(1+t)v(x)\frac{1}{v(0)(1+t)^2} = xv(x)\frac{1}{v(0)(1+t)} \iff v'(x) = 2xv(x).$$

Die Lösung hiervon ist $v(x) = v(0)e^{x^2}$ und daraus folgt dann ebenfalls

$$u(x,t) = \frac{e^{x^2}}{1+t}.$$