KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2013/2014
Institut für Analysis 06.03.2014
Dr. Andreas Müller-Rettkowski
Vitaly Polisky

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Modulklausur

Aufgabe 1

a) Die allgemeine Lösung der Gleichung hat die Gestalt $u = u_s + c_1u_1 + c_2u_2$, wobei u_s eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung und u_1, u_2 zwei linear unabhängige Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung sind. Sind y_1, y_2, y_3 beliebige Lösungen, dann sehen wir, dass ihre Differenzen $y_2 - y_1, y_3 - y_1, y_3 - y_2$ die zugehörige homogene Gleichung lösen. Wir rechnen aus: $v_1(t) := y_2(t) - y_1(t) = e^{2t}, v_2(t) := y_3(t) - y_2(t) = 1$. Die Funktionen v_1, v_2 lösen die zugehörige homogene Gleichung und sind linear unabhängig. Damit bilden sie ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Gleichung. Nun suchen wir nach einer speziellen Lösung der inhomogenen Gleichung. Es gilt $y_1(t) = t^2 + 0 \cdot v_1(t) + 0 \cdot v_2(t)$. Da y_1, y_2, y_3 die Gleichung lösen, ist jede von diesen Funktionen eine spezielle Lösung. Wir nehmen y_1 und erhalten als allgemeine Lösung $y(t) = t^2 + a + be^{2t}$.

b) Wir bestimmen zuerst ein Fundamentalsystem für die dazugehörige inhomogene Gleichung. Das charateristische Polynom lautet $p(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 8x^2 = x^2(x^3 - 3x^2 + 4x + 8)$. Um das Polynom zu faktorisieren, bemerken wir, dass -1 eine Nullstelle von $x^3 - 3x^2 + 4x + 8$ ist. Division durch $x + 1$ liefert $x^3 - 3x^2 + 4x + 8 = (x + 1)(x^2 - 4x + 8)$. Die Nullsstellen von $x^2 - 4x + 8$ errechnen sich zu $2 + 2i$ und $2 - 2i$. Also haben wir $p(x) = x^2(x + 1)(x - (2 + 2i))(x - (2 - 2i))$. Es ergibt sich, dass ein Fundamentalsystem durch $\{1, x, e^{-x}, e^{2x}\cos(2x), e^{2x}\sin(2x)\}$ gegeben ist. Nun suchen wir eine spezielle Lösung. Aufgrund der Form der Inhomogenität machen wir den Ansatz $y_s(x) = ae^x + bx^3 + cx^2$. Dann haben wir $y_s^{(5)} - 3y_s^{(4)} + 4y_s^{(3)} + 8y_s^{(2)} = 10ae^x + 6b + 6bx + 2c$. Koeffizientenvergleich liefert $10a = 1$ sowie $6b = 1, 6b + 2c = 0$. Also folgt $a = \frac{1}{10}, b = \frac{1}{6}, c = -\frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung lautet also $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4e^{2x}\cos(2x) + c_5e^{2x}\sin(2x) + \frac{1}{10}e^x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$.

Aufgabe 2

Wir setzen den Einsatz $u(x) = e^{cx}$ in die Gleichung ein und erhalten $c = 3$. Damit ist $u(x) = e^{3x}$ eine Lösung der Gleichung. Nun schreiben wir die Gleichung um in Form $y'' - (3 + \frac{1}{x})y' + \frac{3}{x}y = 0$. Um eine weitere Lösung zu finden, verwenden wir das

Reduktionsverfahren. Eine weitere Lösung ist nämlich gegeben durch $y(x) = c(x)u(x)$, wobei $z := u'$ der folgenden Gleichung genügt:

$$z' + (3 - \frac{1}{x})z = 0.$$

Es folgt $z' = (\frac{1}{x} - 3)z$ und somit $z(x) = \exp(\int(\frac{1}{x} - 3)dx) = xe^{-3x}$. Also folgt $c(x) = \int z(x)dx = \int xe^{-3x}dx = -\frac{1}{3}(x + \frac{1}{3})e^{-3x}$ und $y(x) = c(x)u(x) = -\frac{1}{3}(x + \frac{1}{3})$. Die allgemeine Lösung lautet also $y(x) = ae^{3x} - \frac{b}{3}(x + \frac{1}{3})$ bzw. $y(x) = ae^{3x} + b(3x + 1)$.

Aufgabe 3

a) Es gilt $A = B + C$ mit $B := 3I$ und:

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wegen $BC = CB$ gilt $e^{xA} = e^{x(B+C)} = e^{xB}e^{xC}$. Klar: $e^{xB} = e^{3xI} = e^{3x}I$. Ferner gilt:

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^n = 0, n \geqslant 4.$$

Es folgt $e^{xC} = I + xC + \frac{1}{2}x^2C^2 + \frac{1}{6}x^3C^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2x & x^2 & x + \frac{x^3}{3} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Und damit:

$$e^{xA} = e^{3x} \begin{pmatrix} 1 & 2x & x^2 & x + \frac{x^3}{3} \\ 0 & 1 & x & \frac{x^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Die Spalten von e^{xA} bilden ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$. Also ist durch $\{e^{3x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3x}\begin{pmatrix} 2x \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3x}\begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e^{3x}\begin{pmatrix} x + \frac{x^3}{3} \\ \frac{x^2}{2} \\ x \\ 1 \end{pmatrix}\}$ ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ gegeben.

Aufgabe 4

Die allgemeine Lösung hat die Gestalt $u(x,y,z) = w((A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})_2, (A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix})_3)$, wobei A eine invertierbare Matrix mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der ersten Spalte und w eine stetig differenzierbare Funktion. Wir wählen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann gilt $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ und wir erhalten $A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} z \\ 3x - z \\ 3y - 2z \end{pmatrix}$. Es folgt für die allgemeine Lösung $u(x,y,z) = w(x - \frac{1}{3}z, y - \frac{2}{3}z)$. Die Bedingung $u(x,y,0) = \sin(xy)$ führt auf $w(x,y) = \sin(xy)$. Somit lautet die allgemeine Lösung $u(x,y,z) = \sin((x - \frac{1}{3}z)(y - \frac{2}{3}z))$.