

## Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

### Bachelor-Modulprüfung

#### Aufgabe 1: (6 + 4 = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - \left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right)y'(x) + \frac{4x-2}{x^2-x+1}y(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Hinweis:** Die Funktion  $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $y_1(x) = e^{2x}$  für alle  $x \in \mathbb{R}$  ist eine partikuläre Lösung der obigen Differentialgleichung.

(b) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) + 2tu(t) - \frac{t}{u^2(t)} = 0 \quad (t \in \mathbb{R}), \quad u(0) = 1.$$

#### Aufgabe 2: (5 + 5 = 10 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$(2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy = 0 \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad y(0) = 2$$

in expliziter Form  $y = y(x)$  und geben Sie das maximale Existenzintervall an.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 2y'(x) = -2x + \sin(2x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Aufgabe 3:** (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}'(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}}_{=:A} \vec{y}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-t} \\ -2 \cos(3t) \\ 2 \sin(3t) \end{pmatrix}}_{=: \vec{b}(t)} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

indem Sie zunächst  $e^{tA}$  für  $t \in \mathbb{R}$  berechnen.**Aufgabe 4:** (5 + 5 = 10 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= tu(x, t) && ((x, t) \in \mathbb{R}^2), \\ u(x, 0) &= x^2 && (x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit dem Charakteristikenverfahren.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{(\partial t)^2}(x, t) - x^2 \frac{\partial^2 u}{(\partial x)^2}(x, t) = 0 \quad (x > 0, t \in \mathbb{R})$$

mit dem Separationsansatz  $u(x, t) = e^{i\omega t}v(x)$ , wobei  $\omega > \frac{1}{2}$  gelte.**Viel Erfolg!**Ergebnisse der Modulprüfung werden am Freitag, den **10.04.2015**, veröffentlicht.Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Mittwoch, den **15.04.2015**, von **16:00 bis 18:00** Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Gebäude 50.35) statt.Mündliche Nachprüfungen finden in der Woche vom **20.04.2015** bis **24.04.2015** statt.