Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

WS 2014/15
04.03.2015

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1:

(a) Bei der Differentialgleichung handelt es sich um eine lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir setzen

$$p(x) = -\left(2 + \frac{2x-1}{x^2-x+1}\right) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Der Ansatz $y_2 = vy_1$ (Reduktionsverfahren von d'Alembert) führt auf die Differentialgleichung

$$v''(x) + v'(x)\underbrace{\left(\frac{2y_1'(x)}{y_1(x)} + p(x)\right)}_{=:r(x)} = 0 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v'. Ihre allgemeine Lösung ist durch $v'(x) = Ce^{-\int r(x)\mathrm{d}x}$ für $x \in \mathbb{R}$ mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$ gegeben. Wir berechnen

$$r(x) = 4 - 2 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} = 2 - \frac{2x-1}{x^2-x+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int r(x)\mathrm{d}x \quad &= \quad 2x - \int \frac{2x-1}{\underbrace{x^2-x+1}_{>0}}\mathrm{d}x \\
&\overset{y=x^2-x+1}{\underset{\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{2x-1}}{=}} \quad 2x - \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y \\
&= \quad 2x - \log(y) = 2x - \log(x^2-x+1) \qquad (x \in \mathbb{R})
\end{aligned}$$

und folglich $v'(x) = C(x^2-x+1)e^{-2x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Unbestimmte Integration liefert

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(x^2-x+1)}_{=u(x)}\underbrace{e^{-2x}}_{=v'(x)}\,\mathrm{d}x \quad &\overset{\text{Part. Int.}}{=} \quad -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2-x+1) + \frac{1}{2}\int \underbrace{(2x-1)}_{=u(x)}\underbrace{e^{-2x}}_{=v'(x)}\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Part. Int.}}{=} \quad -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2-x+1) - \frac{1}{4}(2x-1)e^{-2x} + \frac{1}{4}\int 2e^{-2x}\mathrm{d}x \\
&= \quad -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}e^{-2x} \\
&= \quad -\frac{e^{-2x}}{2}(x^2+1) \qquad (x \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Wiedereinsetzen in den Ansatz $y_2 = vy_1$ und Entfernen der Konstanten liefert

$$y_2(x) = x^2 + 1 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Die allgemeine Lösung y der gegebenen Differentialgleichung lautet dann $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ für $x \in \mathbb{R}$ mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

(b) Die vorliegende Differentialgleichung ist eine Bernoullische Differentialgleichung ($\alpha = -2$). Wir setzen $v = u^3$. Dann ist $v' = 3u^2u'$. Damit gehen wir in die Differentialgleichung ein

$$u'(t)+2tu(t)-\frac{t}{u^2(t)} = 0 \Leftrightarrow 3u^2(t)u'(t)+6tu^3(t)-3t = 0 Leftrightarrow v'(t)+6tv(t) = 3t.$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung für v. Eine partikuläre Lösung $v_p(t) = \frac{1}{2}$ für $t \in \mathbb{R}$ ist durch „scharfes Hinsehen"™zu erraten (alternativ berechnet man sie durch die Variation-der-Konstanten-Formel).

Die Lösung der homogenen Gleichung ist durch

$$v_h(t) = Ce^{-\int 6t\mathrm{d}t} = Ce^{-3t^2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gegeben, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine freie Konstante ist. Damit ist

$$v(t) = v_h(t) + v_p(t) = Ce^{-3t^2} + \frac{1}{2} \quad (t \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v.

Die Anfangsbedingung $u(0) = 1$ liefert $v(0) = u^3(0) = 1$. Damit wird die Konstante $C = \frac{1}{2}$ festgelegt. Rücktransformation liefert

$$u(t) = \sqrt[3]{v(t)} = \sqrt[3]{\frac{e^{-3t^2}+1}{2}} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2:

(a) Sei

$$P(x,y) := 2x - 3y, \quad Q(x,y) := 2y - 3x \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = -3 = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Folglich ist die vorliegende Differentialgleichung exakt auf $\mathbb{R}^2$. Wir bestimmen nun eine Stammfunktion F des Gradientenfeldes $\nabla F = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$. Es gilt

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int P(x,y)\mathrm{d}x + \varphi_2(y) = \int 2x - 3y\mathrm{d}x + \varphi_2(y) = x^2 - 3xy + \varphi_2(y), \\ F(x,y) &= \int Q(x,y)\mathrm{d}y + \varphi_1(x) = \int 2y - 3x\mathrm{d}y + \varphi_1(x) = y^2 - 3xy + \varphi_1(x) \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Die Wahl $\varphi_1(x) = x^2$, $\varphi_2(y) = y^2$ für $x, y \in \mathbb{R}$ liefert eine gesuchte Stammfunktion

$$F(x,y) = x^2 - 3xy + y^2 \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Durch die Anfangsbedingung ist die Lösung in impliziter Form durch

$$x^2 - 3xy + y^2 = F(x,y) = \text{const} = F(0,2) = 4$$

gegeben. Auflösen dieser Gleichung nach y liefert

$$y(x) = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{\frac{9}{4}x^2 - x^2 + 4} = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{\frac{5x^2}{4} + 4}.$$

Die zwei Lösungen schneiden sich nicht. Wegen der Anfangsbedingung, muss

$$y(x) = \frac{3}{2}x + \sqrt{\frac{5x^2}{4} + 4} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

gelten.

(b) Die vorliegende Differentialgleichung ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Ihr charakteristisches Polynom lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Folglich bilden

$$y_1(x) = 1, \quad y_2(x) = e^{2x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ein Fundamentalsystem für die zugehörige homogene Gleichung.

Wir setzen $f_1(x) = -2x$, $f_2(x) = \sin(2x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und suchen partikuläre Lösungen für die Inhomogenitäten f_1 bzw. f_2 separat.

- f_1: Es ist

  $$f_1(x) = -2x = q(x)e^{\sigma x}\cos(\omega x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

  wobei $q(x) = -2x$ ein Polynom ersten Grades und $\sigma + \mathrm{i}\omega = 0$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Folglich lautet der Ansatz von der Form der rechten Seite

  $$y_p^{(1)}(x) = x(a_0 + a_1 x) = a_0 x + a_1 x^2 \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

  $$\begin{aligned} y_p^{(1)\prime\prime}(x) - 2y_p^{(1)\prime}(x) &= f_1(x) \Leftrightarrow 2a_1 - 2a_0 - 4a_1 x = -2x \\ \overset{\text{Koeff.-Vergleich}}{\Leftrightarrow} \quad -4a_1 = -2 &\wedge \quad 2a_1 - 2a_0 = 0 \\ a_1 = \frac{1}{2} &\wedge \quad a_0 = a_1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

  Folglich ist $y_p^1(x) = \frac{x(1+x)}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

- f_2: Es ist

  $$f_2(x) = \sin(2x) = q(x)e^{\sigma x}\sin(\omega x) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

  wobei $q(x) \equiv 1$ ein Polynom nullten Grades und $\sigma + \mathrm{i}\omega = 2\mathrm{i}$ keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Folglich lautet der Ansatz von der Form der rechten Seite

  $$y_p^{(2)}(x) = (a_0\cos(2x) + a_1\sin(2x)) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

  Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

  $$\begin{aligned} y_p^{(2)\prime\prime}(x) - 2y_p^{(2)\prime}(x) &= f_2(x) \\ \Leftrightarrow -4a_0\cos(2x) - 4a_1\sin(2x) + 4a_0\sin(2x) - 4a_1\cos(2x) &= \sin(2x) \\ \overset{\text{Koeff.-Vergleich}}{\Leftrightarrow} \quad -4a_0 - 4a_1 = 0 \quad &\wedge \quad -4a_1 + 4a_0 = 1 \\ a_0 = -a_1 \quad &\wedge \quad a_0 = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

  Folglich ist $y_p^2(x) = \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Insgesamt ist

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_p^{(1)}(x) + y_p^{(2)}(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x(1+x)}{2} + \frac{1}{8}(\cos(2x) - \sin(2x)) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3:
Wir setzen

$$D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad N := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und beobachten} \quad DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix} = ND.$$

Dann ist $A = D + N$ und $e^{tA} = e^{t(D+N)} = e^{tD}e^{tN}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ferner gilt

$$\begin{aligned} e^{tD} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} 2^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir berechnen weiter

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} = (-1)3^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad N^{2k} = (-1)^k 3^{2k} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

$$\Rightarrow \quad N^{2k+1} = (-1)^k 3^{2k+1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} e^{tN} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} N^k = I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{2k}}{(2k)!} N^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} N^{2k+1} \\ &= I_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k} t^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k+1} t^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (3t)^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (3t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \cos(3t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \sin(3t) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(3t) & \sin(3t) \\ 0 & -\sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ausführen des Matrixproduktes liefert

$$e^{tA} = e^{tD}e^{tN} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 0 & -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Variation-der-Konstanten-Formel liefert

$$y(t) = \underbrace{e^{tA}y(0)}_{=:y_h(t)} + \underbrace{e^{tA} \int_0^t e^{-\tau A} b(\tau) \mathrm{d}\tau}_{y_p(t)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Demnach

$$\begin{aligned}
y_h(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2t}\cos(3t) \\ -e^{2t}\sin(3t) \end{pmatrix}, \\
y_p(t) &= e^{tA}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\tau}\cos(3\tau) & -e^{-2\tau}\sin(3\tau) \\ 0 & e^{-2\tau}\sin(3\tau) & e^{-2\tau}\cos(3\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-\tau} \\ -2\cos(3\tau) \\ 2\sin(3\tau) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= e^{tA}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2\tau} \\ -2e^{-2\tau}(\cos^2(3\tau)+\sin^2(3\tau)) \\ -2e^{-2\tau}(\cos(3\tau)\sin(3\tau)-\sin(3\tau)\cos(3\tau)) \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = e^{tA}\int_0^t \begin{pmatrix} e^{-2\tau} \\ -2e^{-2\tau} \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau \\
&= e^{tA}\begin{pmatrix} \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ e^{-2t}-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t}\cos(3t) & e^{2t}\sin(3t) \\ 0 & -e^{2t}\sin(3t) & e^{2t}\cos(3t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-e^{-2t}}{2} \\ e^{-2t}-1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ (1-e^{2t})\cos(3t) \\ (e^{2t}-1)\sin(3t) \end{pmatrix}, \\
y(t) &= y_h(t)+y_p(t) = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \cos(3t) \\ -\sin(3t) \end{pmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

(a) Wir setzen

$$a(x,t,w) = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b(x,t,w) = tw.$$

Das charakteristische System $k(s)' = a(k(s), w(s))$, $w' = b(k(s), w(s))$ lautet dann

$$\begin{aligned}
k_1'(s) &= k_1(s), && (1)\\
k_2'(s) &= 1, && (2)\\
w'(s) &= k_2(s)w(s) \qquad (s \in I) && (3)
\end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned}
k_1(0) &= x_0, && (4)\\
k_2(0) &= 0, && (5)\\
w(0) &= u(k(0)) = x_0^2 \qquad (x_0 \in \mathbb{R}). && (6)
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichungen (1), (2) liefern zusammen mit den Anfangswerten (4), (5) die Grundcharakteristiken

$$\begin{aligned}
k_1(s) &= x_0 e^s, && (7)\\
k_2(s) &= s \qquad (s \in \mathbb{R}). && (8)
\end{aligned}$$

Einsetzen von (8) in (3) liefert mit dem Anfangswert (6) das Anfangswertproblem

$$w'(s) = sw(s), \quad w(0) = x_0^2 \geq 0 \qquad (s \in \mathbb{R})$$

in getrennten Veränderlichen. Für $x_0 = 0$ ist $w \equiv 0$. Für $x_0 \neq 0$ löst man zunächst formal

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} &= sw \rightsquigarrow \frac{1}{w}\mathrm{d}w = s\mathrm{d}s \rightsquigarrow \int_{x_0^2}^{w(s)} \frac{1}{\eta}\mathrm{d}\eta = \int_0^s \xi \mathrm{d}\xi \\
\overset{x_0^2>0}{\Leftrightarrow} [\log(|\eta|)]_{\eta=x_0^2}^{w(s)} &= \frac{s^2}{2} \Leftrightarrow \log(|w(s)|) = \frac{s^2}{2} + \log(x_0^2) \\
\Leftrightarrow |w(s)| &= x_0^2 e^{\frac{s^2}{2}} \qquad (s \in \mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Wegen des Anfangswertes $w(0) = x_0^2 > 0$ ist $w(s) = x_0^2 e^{\frac{s^2}{2}}$ für alle $s \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist $w(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$, was im Nachhinein die Trennung der Veränderlichen rechtfertigt.

Zum gegebenen $x > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ versucht man nun die Gleichung $(x,t) = k(s) = k(s, x_0)$ nach (s, x_0) aufzulösen. Es gilt

$$\begin{aligned} k(s, x_0) &= (x,t) \\ \Leftrightarrow x_0 e^s = x &\wedge \quad s = t \\ \Leftrightarrow x_0 = x e^{-t} &\wedge \quad s = t. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$u(x,t) = w(s, x_0) = x_0^2 e^{\frac{s^2}{2}} = x^2 e^{-2t + \frac{t^2}{2}} \qquad ((x,t) \in \mathbb{R}^2).$$

(b) Einsetzen des gegeben Ansatzes in die Differentialgleichung liefert

$$-\omega^2 e^{\mathrm{i}\omega t} v(x) - x^2 v''(x) e^{\mathrm{i}\omega t} = 0 \overset{e^{\mathrm{i}\omega t} \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 v''(x) + \omega^2 v(x) = 0.$$

Dies ist eine Eulersche Differentialgleichung. Deshalb führen die Substitutionen $x = e^s$, $u(s) = v(e^s)$ und folglich $u'(s) = e^s v'(e^s) = x v'(x)$, $u''(s) = e^{2s} v''(e^s) + e^s v'(e^s) = x^2 v''(x) + x v'(x)$ auf die lineare, homogene Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für u

$$u''(s) - u'(s) + \omega^2 u(s) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dieser Gleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + \omega^2 \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}$, $\lambda_2 = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}}$. Folglich ist die allgemeine Lösung der Gleichung für u durch

$$u(s) = C_1 e^{\frac{s}{2}} \cos\left(\sqrt{4\omega^2 - 1}\frac{s}{2}\right) + C_2 e^{\frac{s}{2}} \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - 1}\frac{s}{2}\right) \qquad (s \in \mathbb{R})$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ gegeben. Resubstitution von $s = \log(x)$ liefert

$$v(x) = C_1 \sqrt{x} \cos\left(\sqrt{4\omega^2 - 1}\frac{\log(x)}{2}\right) + C_2 \sqrt{x} \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - 1}\frac{\log(x)}{2}\right) \qquad (x > 0),$$

bzw.x

$$\begin{aligned} u(x,t) &= e^{\mathrm{i}\omega t} \sqrt{x} \Big(C_1 \cos\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \log\left(\sqrt{x}\right)\right) \\ &\quad + C_2 \sin\left(\sqrt{4\omega^2 - 1} \log\left(\sqrt{x}\right)\right)\Big) \qquad (x > 0,\ t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$