Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dipl.-Math. S. Schwarz

Frühjahr 2016
07.03.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

a) Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1+x+y)dx + (1-x-y)dy = 0$$

in impliziter Form an. Benutzen Sie dazu einen Eulerschen Multiplikator, der nur von $x-y$ abhängt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x+1)y''(x) - (3x+4)y'(x) + (2x+3)y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = e^x$.

Aufgabe 2 (7 + 3 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{2}xy'(x) + \frac{1}{2}y(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, y'(0) = 42, \end{cases}$$

das mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lösbar ist.

a) Finden Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes eine Rekursionsformel für die ungeraden Koeffizienten a_{2k+3} in Abhängigkeit von a_{2k+1} ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Geben Sie a_1 und die geraden Koeffizienten a_{2k} ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), explizit an.

Hinweis: Übersehen Sie nicht, dass die obige Differentialgleichung inhomogen ist.

b) Zeigen Sie, dass die ungeraden Koeffizienten ab a_3 gegeben sind durch

$$a_{2k+3} = \frac{k!}{(2k+3)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (7 + 3 Punkte)

a) (i) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1), \lambda \in \mathbb{R}$, wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

(ii) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) & = -w_1'(t) - w_2(t) \\ w_2'(t) & = w_1(t) + w_1'(t) + 2w_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil **(i)**. Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (1) an.

b) Gegeben sei die Matrix $B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $e^{\frac{\pi B}{4}}$ über die Reihendarstellung der Matrixexponentialfunktion.

Aufgabe 4 (8 + 2 Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), \qquad x \in (0,\pi), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t), \quad u(\pi,t) = u_x(\pi,t), \quad t > 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle beschränkten Lösungen des Randwertproblems in separierter Form $u(x,t) = v(x)w(t)$.

Hinweis: Benutzen Sie dazu den erwähnten Separationsansatz und schränken Sie die möglichen Lösungen zunächst anhand von w mit Hilfe der Beschänktheit von w in $(0,\infty)$ ein.

b) Lösen Sie das obige Randwertproblem mit der zusätzlichen Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sin(x) + \cos(x), \quad x \in [0,\pi].$$

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

Die Klausurergebnisse finden Sie ab **21.04.2016** unter `http://www.math.kit.edu/iana1/` .
Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den **28.04.2016**, von 16 bis 18 Uhr im Hörsaal am Fasanengarten (Geb.50.35) statt.

Die müdlichen Nachprüfungen sind in der Woche vom **02.05.2016** bis **06.05.2016**.