Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. I. Anapolitanos
Dipl.-Math. S. Schwarz

Frühjahr 2016
07.03.2016

Modulprüfung / Bachelor

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

a) Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung

$$(1 + x + y)dx + (1 - x - y)dy = 0,$$

in impliziter Form an. Benutzen Sie dazu einen Eulerschen Multiplikator, der nur von $x - y$ abhängt.

Lösungsvorschlag: Ist $\mu(x - y)$ ein solcher Eulerscher Multiplikator dann

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x - y)(1 + x + y)) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu(x - y)(1 - x - y)),$$

oder

$$-\mu'(x - y)(1 + x + y) + \mu(x - y) = \mu'(x - y)(1 - x - y) - \mu(x - y),$$

oder

$$2\mu(x - y) = 2\mu'(x - y),$$

was den Eulerschen Multiplikator e^{x-y} liefert. Deshalb bekommen wir die exakte Gleichung

$$e^{x-y}(1 + x + y)dx + e^{x-y}(1 - x - y)dy = 0.$$

Wir suchen jetzt eine Funktion $F(x, y)$ mit $F_x(x, y) = e^{x-y}(1 + x + y)$ und $F_y(x, y) = e^{x-y}(1 - x - y)$. Das gibt

$$F(x, y) = \int e^{x-y}(1 + x + y)dx = e^{-y} \int e^x(1 + x + y)dx.$$

Mit partieller Integration, wobei y als Konstante behandelt wird, bekommt man

$$\int e^x(1 + x + y)dx = e^x(1 + x + y) - \int e^x dx.$$

Das gibt

$$F(x, y) = e^{x-y}(x + y) + c(y).$$

Da

$$F_y(x, y) = -e^{x-y}(x + y) + e^{x-y} + c'(y) \overset{!}{=} e^{x-y}(1 - x - y),$$

bekommen wir $c'(y) = 0$. Deshalb ist $F(x, y) = e^{x-y}(x + y)$ ein geegnetes Potential und die impliziten Lösungen werden durch $e^{x-y}(x + y) = C, C \in \mathbb{R}$ gegeben.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$(x + 1)y''(x) - (3x + 4)y'(x) + (2x + 3)y(x) = 0, \quad x > 0.$$

Hinweis: Eine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = e^x$.

Lösungsvorschlag: Der Ansatz $y_2(x) = e^x v(x)$ für eine zweite Lösung der Differentialgleichung führt zu der Gleichung

$$(x+1)(e^x v''(x)+2(e^x)'v'(x)+(e^x)''v(x))-(3x+4)(e^x v'(x)+(e^x)'v(x))+(2x+3)e^x v(x) = 0, \quad x > 0.$$

Und da e^x eine Lösung der Differentialgleichung ist, bekommen wir

$$(x+1)(e^x v''(x) + 2e^x v'(x)) - (3x+4)e^x v'(x) = 0, \quad x > 0,$$

oder wenn man vereinfacht

$$v''(x) = \left(1 + \frac{1}{x+1}\right) v'(x), \quad x > 0.$$

Das gibt $v'(x) = e^{\int \left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx}$ und eine mögliche Wahl von v' ist $v'(x) = e^{x+\ln(1+x)} = (x+1)e^x$. Deshalb bekommen wir mit partieller Integration $v(x) = \int (x+1)e^x dx = \int (x+1)(e^x)' dx = (x+1)e^x - \int (x+1)' e^x dx = xe^x + c$, wobei die Konstante c Null gewählt werden kann. Deshalb ist eine zweite Lösung der Differentialgleichung $y_2(x) = e^x v(x) = xe^{2x}$. Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^{2x}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (7 + 3 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} y''(x) - \frac{1}{2}xy'(x) + \frac{1}{2}y(x) = \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 0, y'(0) = 42, \end{cases}$$

das mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lösbar ist.

a) Finden Sie mit Hilfe des Potenzreihenansatzes eine Rekursionsformel für die ungeraden Koeffizienten a_{2k+3} in Abhängigkeit von a_{2k+1} ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$). Geben Sie a_1 und die geraden Koeffizienten a_{2k} ($k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$), explizit an.

Hinweis: Übersehen Sie nicht, dass obige Differentialgleichung inhomogen ist.

Lösungsvorschlag: Da $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, bekommen wir $y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ und deshalb

$$-\frac{1}{2}xy'(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n a_n}{2} x^n.$$

Ferner haben wir

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n,$$

und die Sinusreihe lautet

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Deshalb bekommen wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} - \frac{n a_n}{2} + \frac{a_n}{2}\right) x^n = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Für $n = 2k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, erhalten wir $(2k+2)(2k+1)a_{2k+2} - \frac{2ka_{2k}}{2} + \frac{a_{2k}}{2} = 0$ oder

$$(2k+2)(2k+1)a_{2k+2} = \frac{(2k-1)a_{2k}}{2}.$$

Da aber $a_0 = y(0) = 0$, folgt, dass $a_{2k} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Wenn $n = 2k+1, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ bekommen wir $(2k+3)(2k+2)a_{2k+3} - \frac{(2k+1)a_{2k+1}}{2} + \frac{a_{2k+1}}{2} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$ oder

$$a_{2k+3} = \frac{ka_{2k+1}}{(2k+3)(2k+2)} + \frac{(-1)^k}{(2k+3)!}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Schließlich gilt $a_1 = y'(0) = 42$.

b) Zeigen Sie, dass die ungeraden Koeffizienten ab a_3 gegeben sind durch

$$a_{2k+3} = \frac{k!}{(2k+3)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Lösungsvorschlag: Wir zeigen das mit Induktion. Für $k = 0$ bekommen wir mit Verwendung der Formel (1)

$$a_3 = \frac{(-1)^0}{3!} = \frac{0!}{(2 \cdot 0 + 3)!} \sum_{l=0}^{0} \frac{(-1)^l}{l!},$$

also stimmt die Aussage für $k = 0$. Wir nehmen jetzt an, dass die Aussage für ein beliebiges aber festes $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ wahr ist. Zu zeigen ist, dass

$$a_{2k+5} = \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(-1)^l}{l!}.$$

In der Tat bekommen wir wegen (1)

$$a_{2k+5} = \frac{(k+1)a_{2k+3}}{(2k+5)(2k+4)} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+5)!}$$

was wegen der Induktionsannahme gibt

$$a_{2k+5} = \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} + \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+5)!}$$

$$= \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k} \frac{(-1)^l}{l!} + \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{(k+1)!}{(2k+5)!} \sum_{l=0}^{k+1} \frac{(-1)^l}{l!},$$

was zu zeigen war. Deshalb stimmt die Aussage für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aufgabe 3 (5 + 2 + 3 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $\det(A-\lambda I) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1), \lambda \in \mathbb{R}$, wobei I die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ ist.

Lösungsvorschlag:

$$(A+I)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff v_1 + v_2 = 0 \text{ und } v_3 = 0.$$

Das liefert den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung $\phi_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$(A-I)\vec{v} = 0 \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff -v_1 + v_2 = 0 \text{ und } -2v_2 - v_3 = 0.$$

Das liefert die den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und deshalb die Lösung $\phi_2(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Da es keinen anderen linear unabhängingen Eigenvektor gibt, aber die algebraische Vielfachheit des Eigenwertes 2 ist, müssen wir eine zusätzliche Lösung finden. Dafür lösen wir die Gleichung

$$(A-I)\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Da die zweite Komponente des Eigenvektors nicht Null ist, kann $w_2 = 0$ gewählt werden. Das führt zu $w_1 = -1$ und $w_3 = -1$ also $\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Das liefert die Lösung

$$\phi_3(t) = e^t(\vec{w} + (A-I)t\vec{w}) = e^t \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) = e^t \begin{pmatrix} -1+t \\ t \\ -1-2t \end{pmatrix}.$$

Die funktionen $\phi_j, j = 1,2,3$ bilden ein Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

b) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} w_1''(t) &= -w_1'(t) - w_2(t) \\ w_2'(t) &= w_1(t) + w_1'(t) + 2w_2(t) \end{cases} \tag{2}$$

für $t \in \mathbb{R}$ in das System erster Ordnung aus Teil **a)**. Geben Sie dann die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems (2) an.

Lösungsvorschlag: Wir führen die Variable $v = w_1'$ ein. Dann bekommen wir

$$\begin{cases} w_1' = v \\ v' = w_1'' = -w_1' - w_2 = -v - w_2 \\ w_2' = w_1(t) + w_1'(t) + 2w_2(t) = w_1 + v + 2w_2 \end{cases} \iff \begin{cases} w_1' = v \\ v' = -v - w_2 \\ w_2' = w_1 + v + 2w_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix},$$

was dem Differentialgleichungssystem aus Teil **a)** entspricht. Die allgemeine Lösung davon ist wegen des Teiles a)

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ v \\ w_2 \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{3} C_j \phi_j(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} -1+t \\ t \\ -1-2t \end{pmatrix}.$$

Deshalb lautet die allgemeine Lösung von (2)

$$\begin{cases} w_1(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^t + C_3 e^t(-1+t) \\ w_2(t) = -2C_2 e^t - C_3(1+2t)e^t. \end{cases}$$

c) Gegeben sei die Matrix $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $e^{\frac{\pi B}{4}}$ mit Hilfe der Definition der Matrixexponentialfunktion durch eine Reihe.

Lösungsvorschlag: Man berechnet $B^2 = -I$. Daraus folgt $B^{2k} = (-1)^k I$ und $B^{2k+1} = (-1)^k B$. Deshalb gilt

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k} B^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1} B^{2k+1}}{(2k+1)!} = I \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}(-1)^k}{(2k)!} + B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}(-1)^k}{(2k+1)!}$$

Also

$$e^{tB} = I\cos(t) + B\sin(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Das gibt

$$e^{\frac{\pi}{4}B} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \\ -\sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (8 + 2 Punkte)

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) = \partial_{xx} u(x,t), & x \in (0,\pi), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u_x(0,t), \quad u(\pi,t) = u_x(\pi,t), & t > 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle <u>beschränkten</u> Lösungen des Randwertproblems in separierter Form $u(x,t) = v(x)w(t)$. Benutzen Sie dazu den erwähnten Separationsansatz und schränken Sie die möglichen Lösungen zunächst anhand von w mit Hilfe der Beschänktheit von w in $(0,\infty)$ ein.

Lösungsvorschlag: Der Separationsansatz führt zur Gleichung $w'(t)v(x) = w(t)v''(x)$ oder $\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}$. Da die linke Seite nur von t und die Rechte nur von x abhängt, müssen beide gleich einer Konstante $d \in \mathbb{R}$ sein. Also

$$\frac{w'(t)}{w(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = d.$$

Die Lösung von $w'(t) = dw(t)$ lautet $w(t) = Ce^{dt}$ und diese Lösung ist nur dann in $(0,\infty)$ beschränkt, wenn $d \leqslant 0$. Deshalb betrachten wir den Fall $d > 0$ nicht.

Fall 1: $d = 0$. Dann bekommen wir $v''(x) = 0$ oder $v(x) = Cx + D$. Aber die Randbedingungen geben $v(0) = v'(0) \implies D = C$ und $v(\pi) = v'(\pi) \implies C\pi + D = C$. Aus den letzten zwei Gleichungen folgt, dass $C = D = 0$ deshalb ist $v(x) = 0$ und der Fall $d = 0$ liefert keine nicht triviale Lösung.

Fall 2: $d < 0$. Dann setzen wir $d = -k^2, k > 0$ und bekommen wir $v''(x) + k^2 v(x) = 0$. Das hat die allgemeine Lösung $v(x) = C\cos(kx) + D\sin(kx)$. Da $v'(x) = -Ck\sin(kx) + Dk\cos(kx)$ bekommen wir

$$v(0) = v'(0) \implies C = kD$$

und $v(\pi) = v'(\pi)$ zusammen mit $C = kD$ gibt

$$kD\cos(k\pi) + D\sin(k\pi) = -k^2 D\sin(kx) + Dk\cos(kx)$$

oder

$$D(1 + k^2)\sin(k\pi) = 0.$$

Da aber $C = kD$ ist, muss für eine Lösung v, die nicht Null ist, $D \neq 0$ gelten und da $(1 + k^2) \neq 0$, bekommen wir $\sin(k\pi) = 0$. Das liefert $k \in \mathbb{N}$ und die Lösungen $v_k(x) = kcos(kx) + \sin(kx)$. Somit gilt $w_k(t) = C_k e^{-k^2 t}$ und die separierten beschränkten Lösungen lauten $C_k e^{-k^2 t}(k\cos(kx) + \sin(x)), k \in \mathbb{N}$.

b) Lösen Sie das obige Randwertproblem mit der zusätzlichen Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sin(x) + \cos(x), \quad x \in [0, \pi].$$

Lösungsvorschlag: Einsetzen von $t = 0$ in die Lösungen aus Teil **a)** ergibt die richtige Lösung für $k = 1, C_k = 1$, also $e^{-t}(\cos(x) + \sin(x))$. Man kann aber diesen Teil auch ohne Teil **a)** lösen: Der Ansatz $u(x,t) = w(t)(\cos(x) + \sin(x))$ führt zur Gleichung $w'(t) = -w(t)$ und daraus folgt, dass $w(t) = Ce^{-t}$. Dies liefert $u(x,t) = Ce^{-t}(\cos(x) + \sin(x))$. Die Anfangsbedingung gibt nun $C = 1$. Man kann auch überprüfen, dass die Randbedingungen erfühlt sind. Deshalb ist

$$u(x, t) = e^{-t}(\cos(x) + \sin(x))$$

die Lösung des Anfangswertproblems.