Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Modulprüfung

Aufgabe 1 (6+4=10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Euler-Differentialgleichung

$$x^3 y'''(x) - 6y(x) = 3, \quad x > 0, \tag{1}$$

mithilfe einer geeigneten Substitution.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = -1,$$

unendlich viele Lösungen $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ besitzt und geben Sie diese explizit an.

Aufgabe 2 (1+4+3+2=10 Punkte)

Auf der Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ werde die Differentialgleichung

$$(xy^2 + y)\,\mathrm{d}x - (x \ln x)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{2}$$

betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung (2) nicht exakt ist.

(b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Form $\mu(x,y) = \frac{1}{x} y^\alpha$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung (2) in impliziter Form an.

(d) Bestimmen Sie explizit diejenige Lösung $y = y(x)$ mit $y(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ und geben Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung an.

Hinweise für nach der Klausur:

- Prüfungsergebnisse werden voraussichtlich ab dem **17.04.2018** durch Aushang am schwarzen Brett neben Zimmer 2.027 des Gebäudes 20.30 bekannt gegeben.
- Einsichtnahme in die korrigierten Bachelor-Modulprüfungen findet am Donnerstag, den **19.04.2018**, zwischen **16:00** und **18:00** im Hörsaal am Fasanengarten statt.
- Mündliche Nachprüfungen finden voraussichtlich in der Woche vom **23.04.** bis **27.04.2018** im Gebäude 20.30 statt.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 3 ((1+5+1)+3=10 Punkte)

(a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t). \end{aligned}$$

(i) Schreiben Sie das System in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und der vektorwertigen Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$.

(ii) Berechnen Sie die Matrix e^{tA}.
Zur Kontrolle: Die Matrix A besitzt die Eigenwerte 0 und 2.

(iii) Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ an.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \geq 2$, eine Matrix mit Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{y}}(t) = B\vec{y}(t) + t\vec{v}, \quad \vec{y}(1) = \vec{0}.$$

Aufgabe 4 (6+4=10 Punkte)

(a) Es sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ und $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$. Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} x\partial_y u - y\partial_x u &= u \quad \text{in} \quad U, \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \Gamma, \end{aligned}$$

mit $g \in \mathcal{C}^1((0,\infty))$ mithilfe des Charakteristikenverfahrens.

Hinweis: $\exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

(b) Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \partial_x^2 u(t,x) - m^2 u(t,x), \qquad && (t,x) \in (0,\infty) \times (0,2\pi), \\ u(t,0) &= u(t,2\pi) = 0, && t > 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für nicht-triviale Lösungen $u(t,x) = \mathrm{e}^{-\mu t} v(x)$ der Parameter μ von der Form

$$\mu = k^2 + m^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

sein muss.

Viel Erfolg!