Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Modulprüfung – Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (6+4=10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Euler-Differentialgleichung

$$x^3 y'''(x) - 6y(x) = 3, \quad x > 0, \tag{1}$$

mithilfe einer geeigneten Substitution.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = -1,$$

unendlich viele Lösungen $y \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ besitzt und geben Sie diese explizit an.

Lösungsvorschlag:

(a) Da es sich um eine Euler-Differentialgleichung handelt, substituieren wir $x = \mathrm{e}^t$, $t \in \mathbb{R}$, und führen die Funktion $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto z(t) := y(\mathrm{e}^t)$ ein. Dann gilt

$$\begin{aligned} z'(t) &= \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) \\ z''(t) &= \mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t) \\ z'''(t) &= \mathrm{e}^{3t} y'''(\mathrm{e}^t) + 3\mathrm{e}^{2t} y''(\mathrm{e}^t) + \mathrm{e}^t y'(\mathrm{e}^t). \end{aligned}$$

Damit geht die Differentialgleichung (1) über in die lineare inhomogene Differentialgleichung 3. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t) - 6z(t) = 3, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Das charakteristische Polynom der Differentialgleichung (2) ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda - 6.$$

Man sieht leicht, dass $\lambda_1 = 3$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Polynomdivision liefert dann die Linearfaktorzerlegung

$$p(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda^2 + 2) = (\lambda - 3)(\lambda + \mathrm{i}\sqrt{2})(\lambda - \mathrm{i}\sqrt{2}).$$

Der Lösungsraum $\mathscr{L}_h$ der homogenen Differentialgleichung $z''' - 3z'' + 2z' - 6z = 0$ ist damit

$$\mathscr{L}_h = \operatorname{span}\left\{\mathrm{e}^{3t}, \cos\left(\sqrt{2}t\right), \sin\left(\sqrt{2}t\right)\right\}.$$

Eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung (2) findet man durch den Ansatz $z_p(t) = c \in \mathbb{R}$. Einsetzen liefert

$$-6z_p(t) = 3,$$

und somit $z_p(t) = -\frac{1}{2}$. Die allgemeine Lösung von (2) ist also gegeben durch

$$z(t) = c_1 e^{3t} + c_2 \cos\left(\sqrt{2}t\right) + c_3 \sin\left(\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{2}, \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}.$$

Rücktransformation liefert als allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1) für $x > 0$:

$$y(x) = z(\ln x) = c_1 x^3 + c_2 \cos\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) + c_3 \sin\left(\sqrt{2}\ln(x)\right) - \frac{1}{2}$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b) Die Differentialgleichung ist vom Typ “getrennte Veränderliche”. Wir können daher die Lösung implizit bestimmen über

$$\int_{-1}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{|\eta|}} = \int_0^x \mathrm{d}\xi.$$

Zur Berechnung unterscheiden wir die Fälle $y < 0$, $y = 0$, und $y > 0$. Es gilt für $y < 0$

$$x = \int_{-1}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{-\eta}} = -2\sqrt{-y} + 2,$$

also $y(x) = -\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$. Für $y = 0$ haben wir

$$x = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{-\eta}} = 2,$$

und damit für $y > 0$

$$x = \int_{-1}^{y} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{|\eta|}} = \int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{-\eta}} + \int_0^y \frac{\mathrm{d}\eta}{\sqrt{\eta}} = 2 + 2\sqrt{y}.$$

Es folgt $y(x) = \left(1 - \frac{x}{2}\right)^2$.

Man beobachte nun, dass die konstante Funktion $y \equiv 0$ eine Lösung der Differentialgleichung ist, die aber die Anfangsbedingung nicht erfüllt. Trotzdem können die beiden oben erhaltenen Lösungen durch ein beliebig langes Intervall, auf dem die Lösung konstant null ist, verbunden werden. Sei dazu $a \geq 0$ ein Parameter. Dann gibt es die Schar von Lösungen

$$y_a(x) = \begin{cases} -\left(1 - \frac{x}{2}\right)^2, & x \leq 2, \\ 0, & 2 < x \leq 2(1+a), \\ \left(1 + a - \frac{x}{2}\right)^2, & x > 2(1+a), \end{cases} \qquad a \geq 0.$$

Aufgabe 2 (1+4+3+2=10 Punkte)

Auf der Menge $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ werde die Differentialgleichung

$$(xy^2 + y)\,\mathrm{d}x - (x \ln x)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{3}$$

betrachtet.

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung (3) nicht exakt ist.

(b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ der Form $\mu(x,y) = \frac{1}{x}y^\alpha$ mit geeignetem $\alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung (3) in impliziter Form an.

(d) Bestimmen Sie explizit diejenige Lösung $y = y(x)$ mit $y(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ und geben Sie das maximale Existenzintervall dieser Lösung an.

LÖSUNGSVORSCHLAG:

(a) Wir definieren die Funktionen $P, Q : D \to \mathbb{R}$,

$$P(x,y) = xy^2 + y, \qquad Q(x,y) = -x \ln x$$

mit partiellen Ableitungen

$$\nabla P(x,y) = \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy + 1 \end{pmatrix}, \qquad \nabla Q(x,y) = \begin{pmatrix} -1 - \ln x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das Gebiet D ist offensichtlich konvex und damit einfach zusammenhängend. Wegen $\partial_x Q = \partial_y P$ genau dann, wenn

$$-1 - \ln x = 2xy + 1, \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{2 + \ln x}{2x},$$

gibt es keine offene Teilmenge von D, auf der die Exaktheitsbedingung $\partial_x Q = \partial_y P$ erfüllt ist. Damit ist die Differentialgleichung nicht exakt.

(b) Der Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ muss so gewählt werden, dass

$$\partial_x(\mu Q) = \partial_y(\mu P) \quad \text{auf } D$$

gilt. Daraus erhält man mit

$$\nabla \mu(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y^\alpha}{x^2} \\ \frac{\alpha y^{\alpha-1}}{x} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \partial_x(\mu Q) &= (\partial_x \mu)Q + \mu(\partial_x Q) \\ \partial_y(\mu P) &= (\partial_y \mu)P + \mu(\partial_y P) \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\frac{y^\alpha}{x^2} x \ln x - \frac{y^\alpha}{x}(1 + \ln x) = \frac{\alpha y^{\alpha-1}}{x}(xy^2 + y) + \frac{y^\alpha}{x}(2xy + 1), \quad (x,y) \in D.$$

Vereinfachung der Gleichung liefert die Bedingung

$$(\alpha + 2)\left(\frac{y^\alpha}{x} + y^{\alpha+1}\right) = 0 \quad \text{für alle } (x, y) \in D,$$

und somit $\alpha = -2$. Es ist also $\mu(x, y) = \frac{1}{xy^2}$ ein integrierender Faktor für die Differentialgleichung (3) auf D.

(c) Aus Aufgabenteil (b) wissen wir, dass die Differentialgleichung $(\mu P)\,\mathrm{d}x + (\mu Q)\,\mathrm{y} = 0$ exakt auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet D ist. Insbesondere existiert ein Potential $\Phi : D \to \mathbb{R}$ mit $\nabla\Phi = \mu \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ und die Lösungen der Differentialgleichung (3) sind implizit gegeben durch Höhenlinien des Potentials, d.h.

$$\Phi(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \in D.$$

Integration der Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_x \Phi(x, y) &= \mu(x, y)P(x, y) = 1 + \frac{1}{xy}, \\ \partial_y \Phi(x, y) &= \mu(x, y)Q(x, y) = -\frac{\ln x}{y^2} \end{aligned}$$

liefert dann eine Potentialfunktion

$$\Phi(x, y) = x + \frac{\ln x}{y}.$$

Zusammenfassend sind die Lösungen der Differentialgleichung (3) also implizit gegeben durch

$$x + \frac{\ln x}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (x, y) \in D.$$

(d) Um die Lösung der Differentialgleichung (3) mit $y(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ zu finden, müssen wir diejenige Lösungskurve bestimmen, welche durch den Punkt $(\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1}) \in D$ geht. Einsetzen in das Potential liefert

$$\Phi((\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1})) = \mathrm{e} + \frac{\ln \mathrm{e}}{e^{-1}} = 2\mathrm{e},$$

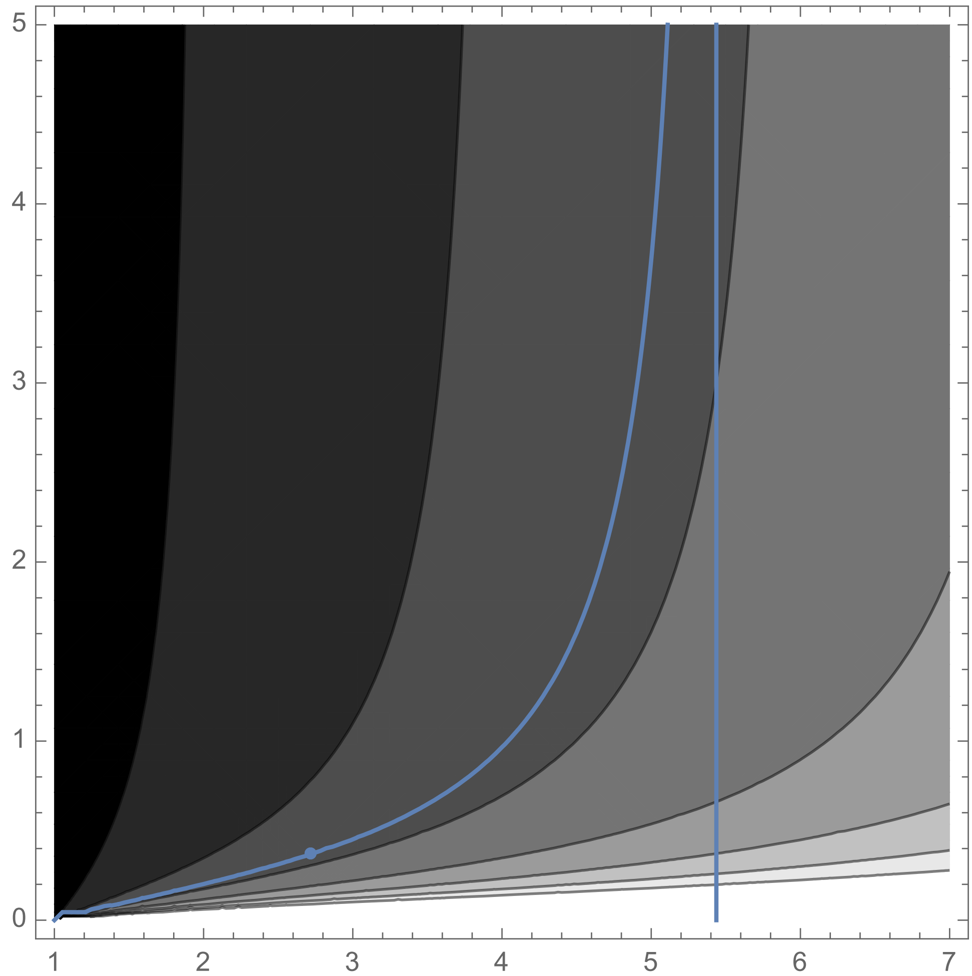
damit ist die Lösung durch $(\mathrm{e}, \mathrm{e}^{-1})$ implizit gegeben durch

$$x + \frac{\ln x}{y} = 2\mathrm{e}.$$

Auflösen nach y führt schließlich auf

$$y(x) = \frac{\ln x}{2\mathrm{e} - x}$$

mit maximalem Existenzintervall $x \in (1, 2\mathrm{e}) \ni \mathrm{e}$. Man beachte die untere Intervallgrenze $x > 1$, da die Lösungskurve für $x \in (0, 1)$ das Gebiet D verlässt (hier gilt $y < 0$)!



5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7

Aufgabe 3 ((1+5+1)+3=10 Punkte)

(a) Gegeben sei das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_1(t) - x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + x_2(t).\end{aligned}$$

(i) Schreiben Sie das System in der Form $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ mit einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und der vektorwertigen Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}$.

(ii) Berechnen Sie die Matrix e^{tA}.
Zur Kontrolle: Die Matrix A besitzt die Eigenwerte 0 und 2.

(iii) Geben Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ an.

(b) Sei $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $d \geq 2$, eine Matrix mit Eigenvektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{\vec{y}}(t) = B\vec{y}(t) + t\vec{v}, \quad \vec{y}(1) = \begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

(a) (i) Es ist

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}, \quad \text{also} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

(ii) Die Matrix A hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 2$. Dies sieht man direkt aus

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2).$$

Die entsprechenden (normierten) Eigenvektoren sind

$$\vec{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{zu } \lambda_1 \quad \text{und} \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1\\ -1\end{pmatrix} \quad \text{zu } \lambda_2.$$

Setzt man $S = (\vec{v}_1\, \vec{v}_2)$, so ist $S^{-1} = S^T = S$, da die Spalten von S ein Orthonormalsystem von $\mathbb{R}^2$ bilden. Es gilt (man bemerke, dass S symmetrisch ist)

$$A = SDS^{-1} (= SDS) \quad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Insbesondere ist dann

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{tSDS^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(SDS^{-1})^k = S\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}D^k\right)S^{-1} = S\mathrm{e}^{tD}S^{-1} = S\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}S^{-1}.$$

Multiplikation der Matrizen, unter Verwendung von $S^{-1} = S$ liefert

$$\mathrm{e}^{tA} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\mathrm{e}^{2t} & 1-\mathrm{e}^{2t}\\ 1-\mathrm{e}^{2t} & 1+\mathrm{e}^{2t}\end{pmatrix}.$$

Alternativ: Man berechnet $A^2 = 2A$, und damit $A^k = 2^{k-1}A$ für alle $k \geq 1$. Aus der Definition des Matrixexponentials folgt

$$\begin{aligned}
e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k 2^{k-1}}{k!} A \\
&= I + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k 2^k}{k!} A = \frac{1}{2}(I + e^{2t} A) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} & 1 - e^{2t} \\ 1 - e^{2t} & 1 + e^{2t} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

(iii) Ein Lösungsfundamentalsystem des homogenen Differentialgleichungssystems $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ist gegeben durch die Spalten von e^{tA}, also lässt sich die allgemeine Lösung des Systems schreiben als

$$\vec{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 + e^{2t} \\ 1 - e^{2t} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 - e^{2t} \\ 1 + e^{2t} \end{pmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},$$

beziehungsweise vereinfacht

$$\vec{x}(t) = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = d_1 e^{\lambda_1 t} \vec{v}_1 + d_2 e^{\lambda_2 t} \vec{v}_2, \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Wir verwenden die "Variation der Konstanten"-Formel und erhalten also Lösung für $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= e^{(t-1)B} \vec{y}(1) + \int_1^t e^{(t-s)B} (s\vec{v}) \, ds = \int_1^t s e^{(t-s)B} \vec{v} \, ds = \int_1^t s e^{(t-s)\lambda} \vec{v} \, ds \\
&= \left(\int_1^t s e^{-s\lambda} \, ds \right) e^{t\lambda} \, \vec{v} = \left(-e^{-\lambda t} \frac{t\lambda - 1}{\lambda^2} + e^{-\lambda} \frac{\lambda + 1}{\lambda^2} \right) e^{t\lambda} \, \vec{v} \\
&= e^{\lambda(t-1)} \frac{\lambda + 1}{\lambda^2} \vec{v} - \frac{t\lambda - 1}{\lambda^2} \vec{v}.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass mit partieller Integration gilt:

$$\begin{aligned}
\int_1^t s e^{-\lambda s} \, ds &= \left[-\frac{s}{\lambda} e^{-\lambda s} \right]_1^t + \frac{1}{\lambda} \int_1^t e^{-\lambda s} \, ds = \left[-\frac{s}{\lambda} e^{-\lambda s} \right]_1^t + \left[-\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda s} \right]_1^t \\
&= -\frac{t}{\lambda} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda} = -e^{-\lambda t} \frac{t\lambda - 1}{\lambda^2} + e^{-\lambda} \frac{\lambda + 1}{\lambda^2}.
\end{aligned}$$

Für $\lambda = 0$ ist

$$\vec{y}(t) = \vec{v} \int_1^t s \, ds = \frac{t^2 - 1}{2} \vec{v}.$$

Aufgabe 4 (6+4=10 Punkte)

(a) Es sei $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$ und $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$. Bestimmen Sie die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} x\partial_y u - y\partial_x u &= u \quad \text{in} \quad U, \\ u &= g \quad \text{auf} \quad \Gamma, \end{aligned}$$

mit $g \in \mathscr{C}^1((0,\infty))$ mithilfe des Charakteristikenverfahrens.

Hinweis: $\exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$.

(b) Betrachten Sie das folgende Randwertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit Quellterm

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) &= \partial_x^2 u(t,x) - m^2 u(t,x), & (t,x) &\in (0,\infty) \times (0,2\pi), \\ u(t,0) &= u(t,2\pi) = 0, & t &> 0. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass für nicht-triviale Lösungen $u(t,x) = \mathrm{e}^{-\mu t} v(x)$ der Parameter μ von der Form

$$\mu = k^2 + m^2, \quad k \in \mathbb{N},$$

sein muss.

Lösungsvorschlag:

(a) Bei der partiellen Differentialgleichung handelt es sich um eine quasilineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot \nabla u = u$$

auf dem oberen Quadranten U. Die charakteristischen Differentialgleichungen sind gegeben durch

$$\gamma'(t) = \gamma^{\perp}(t) = \begin{pmatrix} -\gamma_2(t) \\ \gamma_1(t) \end{pmatrix}, \quad \text{d.h.} \quad \gamma'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \gamma(t), \tag{4}$$

für eine Kurve $\gamma : (0,T) \to U$, sowie die Differentialgleichung

$$w'(t) = w(t) \tag{5}$$

für die Funktion $w(t) = u(\gamma(t))$.

Die Randbedingung ist auf der Halbachse $\Gamma = \{(\xi, 0) : \xi > 0\}$ gegeben. Daraus liest man die Anfangsdaten

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad w(0) = u(\gamma(0)) = u(\xi, 0) = g(\xi)$$

ab.

Die Lösung des Systems (4) für γ erhält man ganz leicht mit dem Hinweis,

$$\gamma(t) = \exp\left[t\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]\gamma(0) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} = \xi\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Es handelt sich dabei um die Parametrisierung einer Kreislinie um den Ursprung mit Radius $\xi > 0$. Damit die Kurve γ das Gebiet U nicht verlässt, muss also $t \in (0, \pi/2)$ gelten.

Weiter liest man aus der Differentialgleichung (5) für w mit Anfangsdatum $w(0) = g(\xi)$, $\xi > 0$, die Lösung

$$w(t) = \mathrm{e}^t w(0) = \mathrm{e}^t g(\xi)$$

ab.

Die Lösung u des Randwertproblems erhält man nun, indem man zu einem beliebigen Punkt $(x, y) \in U$ die entsprechende charakteristische Kurve findet, welche durch (x, y) läuft. Diese erhält man durch Invertieren der Gleichungen

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Da es sich bei der Kurve γ um die Parametrisierung eines Viertelkreises mit Radius ξ handelt, findet man direkt (Polarkoordinaten!)

$$\xi = \sqrt{x^2 + y^2} > 0, \quad \text{und} \quad t = \arctan \frac{y}{x} \in (0, \pi/2).$$

Damit erhält man schließlich die Lösung

$$u(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \mathrm{e}^{\arctan \frac{y}{x}}, \quad (x, y) \in U.$$

(b) Einsetzen des Separationsansatzes in die partielle Differentialgleichung liefert die Differentialgleichung

$$v''(x) + (\mu - m^2) v(x) = 0, \quad x \in (0, 2\pi)$$

für die Funktion v, mit der allgemeinen Lösung

$$v(x) = \begin{cases} A \sin\left(\sqrt{\mu - m^2} x\right) + B \cos\left(\sqrt{\mu - m^2} x\right), & \mu > m^2, \\ Cx + D, & \mu = m^2, \\ E \sinh\left(\sqrt{m^2 - \mu} x\right) + F \cosh\left(\sqrt{m^2 - \mu} x\right), & \mu < m^2, \end{cases}$$

mit Konstanten $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{R}$.

Die Randbedingung an u liefert die Randbedingung $v(0) = v(2\pi) = 0$ für v. Diese kann im Fall $\mu < m^2$ und im Fall $\mu = m^2$ nur durch die triviale Funktion $v \equiv 0$ erfüllt werden ($C = D = E = F = 0$). Im Fall $\mu > m^2$ erhalten wir $v(0) = B = 0$ und damit

$$v(2\pi) = A \sin\left(2\pi \sqrt{\mu - m^2}\right),$$

was nur dann möglich ist falls $A = 0$ (triviale Lösung) oder

$$\sqrt{\mu - m^2} \in \mathbb{N}, \quad \text{d.h.} \quad \mu = m^2 + k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$