26.02.2019
PD Dr. Peer Kunstmann

Höhere Mathematik III für Physik

Bachelor-Modulprüfung

Aufgabe 1 (12 + 8 = 20 Punkte)

(a) Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' - y &= 0, \\ y(1) &= 2, \\ y'(1) &= -1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Typ und die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ und geben Sie anschließend die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblemes an.

(b) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + x^2y' + 2xy &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie ihre Lösung.

Aufgabe 2 (4 + 5 + 11 = 20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\mathrm{e}^x \frac{1}{\cos(y)} - \tan(y) + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0, \ \ y(0) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Ein Eulerscher Multiplikator μ_a zu der obigen Differentialgleichung hat die Form

$$\mu_a(x, y) = \mathrm{e}^{-ax} \cos(y).$$

Bestimmen Sie ein passendes a so, dass eine exakte Differentialgleichung entsteht.

(c) Bestimmen Sie die explizite Lösung y des obigen Anfangswertproblems auf einem maximalen Existenzintervall.

— Bitte Wenden! —

Aufgabe 3 (10 + 2 + 8 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \; b(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen die Matrixexponentialfunktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

an.

(c) Machen Sie einen geeigneten partikulären Ansatz und bestimmen Sie so die Lösung des Anfangswertproblemes

$$y' = Ay + b, \; y(0) = y_0.$$

Aufgabe 4 (9 + 6 + 5 = 20 Punkte)

(a) Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung mithilfe eines Charakteristikenverfahrens

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) &= u^2(x,y) \text{ für } x, y \in \mathbb{R}, \\ u(x,-x) &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mithilfe eines Separationsansatzes der Form $v(t,x) = w(t)z(x)$

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v(t,x) &= 0 \text{ auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) &= \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Sei nun v eine Lösung von dem Anfangswertproblem aus (b). Bestimmen Sie die Lösung von dem neuen Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) + \cos(t) u(t,x) &= 0 \text{ auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

indem Sie den Ansatz

$$u(t,x) = \frac{v(t,x)}{g(t)}$$

nutzen für eine Funktion $g \in C^1((0,\infty))$. Bestimmen Sie auch die Funktion g.

Viel Erfolg!

Hinweise: Ergebnisse dieser Modulprüfung werden spätestens am Mittwoch den 24.04.2019 im Mathematik Gebäude (20.30) im zweiten Stock veröffentlicht.
Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den 02.05.2019 von 16.00 Uhr bis 18.00 Uhr statt.
Die mündlichen Nachprüfungen finden in der Woche vom 13.05.2019 bis 17.05.2019 statt.