26.02.2019
PD Dr. Peer Kunstmann

Höhere Mathematik III für Physik

Bachelor-Modulprüfung - Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 (12 + 8 = 20 Punkte)

(a) Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' - y &= 0, \\ y(1) &= 2, \\ y'(1) &= -1. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie den Typ und die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung auf $(0, \infty)$ und geben Sie anschließend die Lösung des zugehörigen Anfangswertproblemes an.

(b) Machen Sie einen Potenzreihenansatz $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$ für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' + x^2y' + 2xy &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Vereinfachen Sie ihre Lösung.

Lösung von Aufgabe 1

(a) **Typ der Differentialgleichung**: Es handelt sich hierbei um eine lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten, genauer ist es von der Form her eine homogene Eulersche Differentialgleichung.
Schritt 0. Substitution zur Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: Wir substituieren $x = \mathrm{e}^t$ und $v(t) = y\left(\mathrm{e}^t\right)$, so gilt für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} v'(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right), \\ v''(t) &= \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) = v'(t) + \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) \\ \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) &= v''(t) - v'(t) \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. So erhalten wir durch Einsetzen in die Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{e}^{2t} y''\left(\mathrm{e}^t\right) + \mathrm{e}^t y'\left(\mathrm{e}^t\right) - y\left(\mathrm{e}^t\right) \\ &= \left(v''(t) - v'(t)\right) + v'(t) - v(t) \\ &= v''(t) - v(t). \end{aligned}$$

Nun haben wir eine homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten erhalten.
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das Charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1).$$

Es handelt sich jeweils um zwei einfache Nullstellen, $\lambda = \pm 1$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung v: Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung v:

$$v(t) = v_h(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^t$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Rücksubstitution/ Allgemeine Lösung y: Über $t = \log(x)$ erhalten wir

$$y(x) = v\left(\log(x)\right) = C_1 \mathrm{e}^{-\log(x)} + C_2 \mathrm{e}^{\log(x)} = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x$$

für alle $x \in (0, \infty)$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Spezielle Lösung/ Anfangswertproblem: Die Lösung y hat die Ableitung:

$$y(x) = -C_1 \frac{1}{x^2} + C_2$$

für alle $x \in (0, \infty)$. Die beiden Anfangsbedingungen liefern nun

$$\begin{aligned} 2 &= y(1) = C_1 + C_2, \\ -1 &= y'(1) = -C_1 + C_2. \end{aligned}$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt

$$2C_2 = 1 \;\Leftrightarrow\; C_2 = \frac{1}{2}$$

und damit nun

$$2 = C_1 + \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; C_1 = \frac{3}{2}.$$

Die Lösung für das Anfangswertproblem lautet somit

$$y(x) = \frac{3}{2x} + \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$$

für alle $x \in (0, \infty)$. $\square$

(b) Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ mit Koeffizienten $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, so haben wir für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Alle Koeffizienten sind selber Potenzreihen/ Polynome und haben daher Konvergenzradius unendlich, also wird unsere Lösung laut Vorlesung auch auf ganz $\mathbb{R}$ durch eine Potenzreihe gegeben sein.
Schritt 2. Ansatz einsetzen: Es gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 = y''(x) + x^2 y'(x) + 2xy(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2x \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} 2 c_n x^{n+1} \\ &= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) c_n x^{n+1} \\ &= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) c_{n-1} x^n \\ &= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\left[(n+2) c_{n+2} + c_{n-1}\right] x^n \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Per Koeffizientenvergleich (linke und rechte Seite) muss $c_2 = 0$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\begin{aligned} (n+1)\left[(n+2) c_{n+2} + c_{n-1}\right] &= 0 \\ \Leftrightarrow\; (n+2) c_{n+2} + c_{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \; c_{n+2} = -\frac{c_{n-1}}{(n+2)}.$$

Schritt 4. Anfangsbedingungen: Die Anfangsbedingungen ergeben:

$$1 = y(0) = c_0,$$
$$0 = y'(0) = c_1.$$

Dies liefert nun wegen $c_2 = 0$ und der Vorschrift $c_{n+2} = -\frac{c_{n-1}}{(n+2)}$:

$$c_1 = c_2 = c_4 = c_5 = c_7 = c_8 = c_{10} = c_{11} = \ldots = 0,$$

und

$$c_0 = 1,\; c_3 = -\frac{1}{3},\; c_6 = \frac{1}{3 \cdot 6},\; c_9 = -\frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 9},\; c_{12} = \frac{1}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 12},\; \ldots.$$

Also erhalten wir so als Lösung

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n n!} x^{3n}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 2 (4 + 5 + 11 = 20 Punkte)

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem

$$e^x \frac{1}{\cos(y)} - \tan(y) + \frac{dy}{dx} = 0, \; y(0) = 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass die obige Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Ein Eulerscher Multiplikator μ_a zu der obigen Differentialgleichung hat die Form

$$\mu_a(x, y) = e^{-ax} \cos(y).$$

Bestimmen Sie ein passendes a so, dass eine exakte Differentialgleichung entsteht.

(c) Bestimmen Sie die explizite Lösung y des obigen Anfangswertproblems auf einem maximalen Existenzintervall.

Lösung von Aufgabe 2

(a) Wir setzen

$$P(x, y) = \frac{e^x}{\cos(y)} - \tan(y) \text{ und } Q(x, y) = 1$$

so ist Q stetig differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}^2$ und P stetig differenzierbar in allen Punkten

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \frac{2k + 1}{2}\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Damit hat die Differentialgleichung die Form

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$$

Nicht-Exaktheit: Für die jeweiligen partiellen Ableitungen gilt:

$$\begin{aligned}
\tan'(\varphi) &= \frac{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}{\cos^2(\varphi)} = \frac{1}{\cos^2(\varphi)} \text{ für alle } \varphi \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \theta \in \mathbb{R} : \theta \neq \frac{2k + 1}{2}\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \right\}, \\
\partial_y P(x, y) &= \frac{e^x \sin(y)}{\cos^2(y)} - \frac{1}{\cos^2(y)} = \frac{e^x \sin(y) - 1}{\cos^2(y)}, \\
\partial_x Q(x, y) &= 0
\end{aligned}$$

für alle

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq \frac{2k + 1}{2}\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Damit stimmen diese beiden partiellen Ableitungen auf keiner nicht-leeren offenen Menge des $\mathbb{R}^2$ überein und die Differentialgleichung ist so nicht exakt.

(b) **Eulerschen Multiplikator bestimmen**: Laut Aufgabenstellung wissen wir, dass ein Eulerscher Multiplikator die Form

$$\mu(x, y) = e^{-ax} \cos(y)$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ haben muss. Setzen wir nun

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x, y) &:= \mu(x, y)P(x, y) = e^{-ax} \cos(y) \left(\frac{e^x}{\cos(y)} - \tan(y) \right) \\
&= e^{(1-a)x} - e^{-ax} \sin(y), \\
\widetilde{Q}(x, y) &:= \mu(x, y)Q(x, y) = e^{-ax} \cos(y)
\end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Durch Multiplizieren der Differentialgleichung mit μ erhalten die neue Form

$$(*) \qquad \widetilde{P}(x, y)dx + \widetilde{Q}(x, y)dy = 0.$$

Wir bestimmen erneut die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_y \widetilde{P}(x, y) &= 0 - e^{-ax} \cos(y) = -e^{-ax} \cos(y), \\
\partial_x \widetilde{Q}(x, y) &= -ae^{-ax} \cos(y)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Soll nun die mit μ multiplizierte Differentialgleichung exakt sein, so muss

$$\partial_y \widetilde{P}(x,y) = \partial_x \widetilde{Q}(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sein, dies liefert uns

$$\begin{aligned} -\mathrm{e}^{-ax}\cos(y) = \partial_y \widetilde{P}(x,y) = \partial_x \widetilde{Q}(x,y) &= -a\mathrm{e}^{-ax}\cos(y) \text{ für alle} (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \Leftrightarrow\ a &= 1. \end{aligned}$$

Damit lauten nun

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(x,y) &= 1 - \mathrm{e}^{-x}\sin(y), \\ \widetilde{Q}(x,y) &= \mathrm{e}^{-x}\cos(y) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und der gesuchte Eulerscher Multiplikator ist

$$\mu(x,y) = \mathrm{e}^{-x}\cos(y) \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) **Stammfunktion F bestimmen**: Da die Differentialgleichung $(*)$ nun exakt ist auf $\mathbb{R}^2$, existiert eine stetig differenzierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x,y) \\ \widetilde{Q}(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dies impliziert nun

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \partial_x F(x,y)\mathrm{d}x = \int \widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int \left(1 - \mathrm{e}^{-x}\sin(y)\right)\mathrm{d}x \\ &= x + \mathrm{e}^{-x}\sin(y) + C(y) \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Andererseits muss nun gelten

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{-x}\cos(y) = \widetilde{Q}(x,y) = \partial_y F(x,y) &= 0 + \mathrm{e}^{-x}\cos(y) + C'(y) \text{für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \Leftrightarrow\ C' &\equiv 0 \\ \Leftrightarrow\ C(\cdot) &\text{ ist konstant.} \end{aligned}$$

O.B.d.A. wählen wir $C \equiv 0$, so lautet die Funktion F:

$$F(x,y) = x + \mathrm{e}^{-x}\sin(y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Weiter ist

$$F(0,0) = 0 + \sin(0) = 0.$$

Anfangswertproblem lösen: Laut Vorlesung ist nun jede Lösung $y\colon I \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems, wobei $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, gegeben durch

$$x + \mathrm{e}^{-x}\sin(y(x)) = F(x,y) = F(0,0) = 0 \text{ für alle } x \in I.$$

Nach y auflösen: Wir können die obere Gleichung eindeutig nach y auflösen:

$$\begin{aligned} x + \mathrm{e}^{-x}\sin(y(x)) &= 0 \\ \Leftrightarrow\ \mathrm{e}^{-x}\sin(y(x)) &= -x \\ \Leftrightarrow\ \sin(y(x)) &= -x\mathrm{e}^{x} \\ \Leftrightarrow\ y(x) &= \arcsin\left(-x\mathrm{e}^{x}\right) \end{aligned}$$

für alle $x \in I$.

Maximales Existenzintervall: Sei nun $I_{\max}$ das maximale Existenzintervall, insbesondere ist $0 \in I_{\max}$. Es gilt:

$$y(0) = 0,\ -x\mathrm{e}^{x} > 0 \text{ für } x < 0 \text{ und } -x\mathrm{e}^{x} < 0 \text{ für } x > 0,$$

also folgt nach der Definition vom arcsin, dass

$$y(x) > 0 \text{ für } x < 0 \text{ und } y(x) < 0 \text{ für } x > 0.$$

Setze $g(x) := -x\mathrm{e}^x$ für $x \in \mathbb{R}$, so ist $y(x) = \arcsin(g(x))$ für $x \in I$. Somit ist g stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit der Ableitung

$$g'(x) = -\mathrm{e}^x - x\mathrm{e}^x = -\mathrm{e}^x\,(1+x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir sehen direkt, dass

$$0 = g'(x) = -\mathrm{e}^x\,(1+x) \;\Leftrightarrow\; 1+x=0 \;\Leftrightarrow\; x=-1$$

ist, und wegen $\exp\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ folgt

$$g'(x) > 0 \text{ für } x < -1 \text{ und } g'(x) < 0 \text{ für } x > -1,$$

d.h. die Funktion g hat im Punkt $x = -1$ ein globales Maximum und zwar

$$g(-1) = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \in (0,1).$$

Andererseits wächst die Exponentialfunktion stärker als jedes Polynom, was uns sagt, dass

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} -x\mathrm{e}^x = -\infty$$

ist. Nach dem Zwischenwertsatz und der strengen Monotonie existiert genau eine Stelle $\omega_0 \in (0,\infty)$ mit

$$-1 = g(\omega_0) = -\omega_0\mathrm{e}^{\omega_0}.$$

Damit lautet ist das maximale Existenzintervall

$$I_{\max} = [-1, \omega_0]\,.$$

$\square$

Bemerkung: Der Wert von ω_0 ist etwa $0,55$.

Aufgabe 3 (10 + 2 + 8 = 20 Punkte)

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ b(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen die Matrixexponentialfunktion e^{tA} für $t \in \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung

$$y' = Ay$$

an.

(c) Machen Sie einen geeigneten partikulären Ansatz und bestimmen Sie so die Lösung des Anfangswertproblemes

$$y' = Ay + b, \ y(0) = y_0.$$

Lösung von Aufgabe 3

(a) **Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen**: Es gilt nach dem Entwicklungssatz von Laplace

$$\begin{aligned} p(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 3 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)\left((1-\lambda)^2 + 4\right). \end{aligned}$$

Also hat p drei einfache Nullstelle bei $\lambda = 1$ und in $\lambda = 1 \pm 2\mathrm{i}$.
Schritt 2. Eigenräume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned} E_1 &= \ker(A - I_3) \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ E_{1-2\mathrm{i}} &= \ker(A - (1-2\mathrm{i}) \cdot I_3) \\ &= \ker \begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 2 & 2\mathrm{i} & -2 \\ 3 & 2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & -1 \\ 0 & 2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix} \\ &= \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \operatorname{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Schritt 3. Lösungen der homogenen Gleichung/ Aufstellen der Fundamentalmatrix: Die erste Fundamentallösung lautet

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die beiden anderen Fundamentallösung ergeben sich durch Real- und Imaginärteil bilden von

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})t} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} &= \mathrm{e}^t \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \left(\cos(2t) - \mathrm{i}\sin(2t)\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \\ -1 \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) + \mathrm{i}\cos(2t) \\ -\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \left[\begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \right],
\end{aligned}$$

d.h. die beiden Fundamentallösungen lauten

$$\begin{aligned}
\Phi_2(t) &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix}, \\
\Phi_3(t) &= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Damit ist nun die Fundamentalmatrix gegeben durch:

$$\begin{aligned}
\Phi(t) &= \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & \Phi_3(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t & 0 & 0 \\ -3\mathrm{e}^t & \mathrm{e}^t \sin(2t) & \mathrm{e}^t \cos(2t) \\ 2\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t \cos(2t) & \mathrm{e}^t \sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 & -\cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix}, \\
\Phi(0) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

Für die Matrixexponentialfunktion brauchen wir die inverse Matrix zu $\Phi(0)$. Dies berechnen wir über

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right),
\end{aligned}$$

d.h.

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Schritt 4. Matrixexponentialfunktion aufstellen: Es gilt laut Vorlesung:

$$\begin{aligned}
e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} &= e^t \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & \sin(2t) & \cos(2t) \\ 2 & -\cos(2t) & \sin(2t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= e^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} + \sin(2t) + \frac{3}{2}\cos(2t) & \cos(2t) & -\sin(2t) \\ 1 - \cos(2t) + \frac{3}{2}\sin(2t) & \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

(b) Die (reelle) Lösung des homogenen Differentialgleichungssystems

$$y' = Ay$$

lautet

$$\begin{aligned}
y(t) = y_h(t) &= C_1\Phi_1(t) + C_2\Phi_2(t) + C_3\Phi_3(t) \\
&= C_1 e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + C_3 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \\
&= e^t \left[C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \right]
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. $\square$

(c) **Partikulären Ansatz "raten"**: Wir machen den partikulären Ansatz

$$y_p(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

mit zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Abgeleitet gilt:

$$y_p'(t) = 2e^{2t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Setzen wir diesen Ansatz in die inhomogene Differentialgleichung

$$y' = Ay + b$$

ein, so erhalten

$$\begin{aligned}
e^{2t} \begin{pmatrix} 2\alpha \\ 2\beta \\ 2\gamma \end{pmatrix} = y_p'(t) = Ay_p(t) + b(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} e^{2t} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= e^{2t} \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha + \beta - 2\gamma \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + \beta + 2\gamma \\ -3\alpha - 2\beta + \gamma \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dann ist $\alpha = 1$ und so folgt per Umformung:

$$0 = -2 + \beta + 2\gamma \;\Leftrightarrow\; \beta = 2 - 2\gamma.$$

Dies eingesetzt in die letzte Zeile impliziert nun

$$0 = -3 - 2(2 - 2\gamma) + \gamma = -7 + 5\gamma \;\Leftrightarrow\; 5\gamma = 7 \;\Leftrightarrow\; \gamma = \frac{7}{5}.$$

Also ist

$$\beta = 2 - \frac{14}{5} = -\frac{4}{5}.$$

Damit lautet die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = \mathrm{e}^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{4}{5} \\ \frac{7}{5} \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.
Allgemeine Lösung y aufstellen: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist nun

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \left[C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \right]$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.
Spezielle Lösung y aufstellen/ Anfangswertproblem: Wegen den Anfangsdaten gilt

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = y(0) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h insbesondere

$$0 = 1 + 2C_1 \;\Leftrightarrow\; 2C_1 = -1 \;\Leftrightarrow\; C_1 = -\frac{1}{2}.$$

Dies eingesetzt in die zweite Gleichung liefert uns

$$1 = -\frac{4}{5} + \frac{3}{2} + C_3 = \frac{7}{10} + C_3 \;\Leftrightarrow\; C_3 = \frac{3}{10}$$

und eingesetzt in die dritte Gleichung:

$$1 = \frac{7}{5} - 1 - C_2 = \frac{2}{5} - C_2 \;\Leftrightarrow\; C_2 = -\frac{3}{5}.$$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblemes gegeben durch

$$y(t) = \frac{\mathrm{e}^{2t}}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \left[-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) \\ -\cos(2t) \end{pmatrix} + \frac{3}{10} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \right]$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. $\square$

Aufgabe 4 (9 + 6 + 5 = 20 Punkte)

(a) Lösen Sie die folgende partielle Differentialgleichung mithilfe eines Charakteristikenverfahrens

$$\begin{aligned} \partial_x u(x,y) + \partial_y u(x,y) &= u^2(x,y) \text{ für } x,y \in \mathbb{R}, \\ u(x,-x) &= x \text{ für } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem mithilfe eines Separationsansatzes der Form $v(t,x) = w(t)z(x)$

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v(t,x) &= 0 \text{ auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ v(0,x) &= \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Sei nun v eine Lösung von dem Anfangswertproblem aus (b). Bestimmen Sie die Lösung von dem neuen Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) + \cos(t) u(t,x) &= 0 \text{ auf } (0,\infty) \times \mathbb{R}, \\ u(0,x) &= \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

indem Sie den Ansatz

$$u(t,x) = \frac{v(t,x)}{g(t)}$$

nutzen für eine Funktion $g \in C^1([0,\infty))$. Bestimmen Sie auch die Funktion g.

Lösung von Aufgabe 4

(a) **Schritt 1. Setting aufstellen**: Setzen wir

$$\begin{aligned} a(x,y,u) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ b(x,y,u) &= u^2(x,y), \\ f(x) &= x. \end{aligned}$$

Dann haben wir eine Partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} a(x,y,u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u(x,y) = b(x,y,u) \\ u(x,-x) = f(x) \end{cases}.$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k:

$$k(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u \right)(k(s)) \cdot k'(s) = k'(s) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u \right)(k(s)) \\ a(k(s),w(s)) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} u \right)(k(s)) &= b(k(s),w(s)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \end{pmatrix} &= k'(s) = a(k(s),w(s)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ w'(s) &= b(k(s),w(s)) = w^2(s), \\ k(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ -x_0 \end{pmatrix}, \\ w(0) &= u(k(0)) = u(x_0,-x_0) = x_0. \end{aligned}$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:
Lösung für k: Die Differentialgleichungen für x, y und w lösen wir im folgenden:
Lösung der Gleichung für $x(\cdot)$:

$$x(s) = = s + C_1,$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstante $C_1 \in \mathbb{R}$. Wegen $x(0) = k_1(0) = x_0$ folgt $C_1 = x_0$ und daher

$$x(s) = s + x_0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Lösung der Gleichung für $y(\cdot)$: Diese lautet

$$y(s) = s + C_2$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ für eine Konstante $C_2 \in \mathbb{R}$. Wegen $y(0) = k_2(0) = -x_0$ folgt $C_2 = -x_0$ und daher

$$y(s) = s - x_0$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Lösung der Gleichung für $w(\cdot)$: Mithilfe der Trennung der Variablen gilt:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{w} = \int \frac{1}{w^2} \mathrm{d}w = \int 1 \mathrm{d}s + C_3 = s + C_3 \\ \Leftrightarrow \ w(s) = -\frac{1}{s + C_3}. \end{aligned}$$

Ist nun $x_0 = 0$, so ist $w \equiv 0$ die einzige Lösung, ist hingegen $x_0 \neq 0$, so folgt mit $w(0) = x_0$, dass $C_3 = -\frac{1}{x_0}$ ist und

$$w(s) = -\frac{1}{s - \frac{1}{x_0}} = \frac{x_0}{1 - sx_0}$$

für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{x_0} \right\}$.
Schritt 4. Nach s und x_0 auflösen und einsetzen: Lösen wir nach x_0 auf, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x(s) &= s + x_0 \\ \Leftrightarrow \ x_0 &= x(s) - s. \end{aligned}$$

Andererseits folgt durch Addition der beiden Terme

$$\begin{aligned} x(s) &= s + x_0, \\ y(s) &= s - x_0, \end{aligned}$$

dass

$$x(s) + y(s) = 2s \ \Leftrightarrow \ s = \frac{x(s) + y(s)}{2},$$

also auch

$$x_0 = x(s) - s = x(s) - \frac{x(s) + y(s)}{2} = \frac{x(s) - y(s)}{2}.$$

Eingesetzt liefert dies uns

$$\begin{aligned} u(x(s), y(s)) = u(k(s)) = w(s) &= \frac{x_0}{1 - sx_0} \\ &= \frac{\frac{x(s)-y(s)}{2}}{1 - \frac{x(s)-y(s)}{2} \cdot \frac{x(s)+y(s)}{2}} \\ &= \frac{\frac{x(s)-y(s)}{2}}{1 - \frac{x^2(s)-y^2(s)}{4}} \\ &= \frac{2\left(x(s) - y(s)\right)}{4 - x^2(s) + y^2(s)} \end{aligned}$$

für alle s. Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung u lautet

$$u(x, y) = \frac{2\left(x - y\right)}{4 - x^2 + y^2}$$

für alle

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4 - x^2 + y^2 \neq 0\right\}.$$

□

(b) **Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten**: Wir machen den Separationsansatz

$$v(t,x) = w(t)z(x).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_t v(t,x) &= w'(t)z(x), \\ \partial_x v(t,x) &= w(t)z'(x), \\ \partial_{xx} v(t,x) &= w(t)z''(x). \end{aligned}$$

Schritt 2. Ansatz einsetzen und umformen: Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} & 0 = \partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v(t,x) = w'(t)z(x) - w(t)z''(x) \\ \Leftrightarrow\ & w(t)z''(x) = w'(t)z(x) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{z''(x)}{z(x)} = \frac{w'(t)}{w(t)}. \end{aligned}$$

Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen: Da dies für alle t und x gelten muss, müssen die beiden Quotienten

$$\frac{z''(x)}{z(x)} \text{ und } \frac{w'(t)}{w(t)}$$

gleich und konstant einem λ^2 sein mit $\lambda \in \mathbb{C}$, d.h.

$$\frac{z''(x)}{z(x)} = \lambda^2 = \frac{w'(t)}{w(t)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} w'(t) &= \lambda^2 w(t), \\ z''(x) &= \lambda^2 z(x). \end{aligned}$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung erster bzw. zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.
Lösung zu w: Die Lösung zu w lautet nun

$$w^{(\lambda)}(t) = C^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda^2 t}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten C.
Lösung zu z: Umgestellt bekommen wir

$$z''(x) - \lambda^2 z(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda)$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\lambda$. Als Lösung folgt nun

$$z^{(\lambda)}(x) = C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda x}$$

falls $\lambda \neq 0$ und sonst ($\lambda = 0$)

$$z^{(0)}(x) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)} x$$

für jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten C_1, C_2.
Schritt 4. Allgemeine Lösung aufstellen: Wir bekommen als Teillösungen

$$\begin{aligned} v^{(0)}(t,x) &= w^{(0)}(t)z^{(0)}(x) = C^{(0)}\left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)} x\right) \text{ für } \lambda = 0, \\ v^{(\lambda)}(t,x) &= w^{(\lambda)} z^{(\lambda)}(x) = C^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda^2 t}\left(C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda x}\right) \text{ für } \lambda \neq 0. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir o.B.d.A. $C^{(\lambda)} = 1$ wählen können. Dann ist eine (komplexwertige) Lösung v gegeben durch

$$v(t,x) = v^{(0)}(t,x) + \sum_{\lambda \neq 0} v^{(\lambda)}(t,x)$$

$$= C_1^{(0)} + C_2^{(0)}x + \sum_{\lambda\neq 0} e^{\lambda^2 t}\left(C_1^{(\lambda)}e^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)}e^{\lambda x}\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1^{(0)}, C_2^{(0)}, C_1^{(\lambda)}, C_2^{(\lambda)} \in \mathbb{C}$ für $\lambda \neq 0$, sofern diese Reihe existiert.
Schritt 5. Spezielle Lösung v/ Anfangsdaten beachten Wegen der Anfangswertbedingung

$$\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right) = \sin(x) = v(0,x) = C_1^{(0)} + C_2^{(0)}x + \sum_{\lambda\neq 0}\left(C_1^{(\lambda)}e^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)}e^{\lambda x}\right)$$

wählen wir $C_1^{(0)} = C_2^{(0)} = 0$, $C_1^{(\mathrm{i})} = -\frac{1}{2\mathrm{i}}$, $C_2^{(\mathrm{i})} = \frac{1}{2\mathrm{i}}$ und $C_1^{(\lambda)} = C_2^{(\lambda)} = 0$ für $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0, \mathrm{i}\}$, d.h. $\lambda^2 = -1$. So lautet nun die Lösung:

$$v(t,x) = \frac{e^{-t}}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}\right) = e^{-t}\sin(x)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Da die Lösung stets auf $[0,T]\times\mathbb{R}$ beschränkt ist für alle $T > 0$ muss, diese (unter den beschränkten Funktionen) dort auch eindeutig sein, also sogar auf $[0,\infty)\times\mathbb{R}$, d.h. v ist die einzige stetig differenzierbare beschränkte Funktion, die das Anfangswertproblem löst. □

Alternative Lösung zur Aufgabe (b): Wir machen den Separationsansatz

$$v(t,x) = w(t)z(x).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned}\partial_t v(t,x) &= w'(t)z(x),\\ \partial_x v(t,x) &= w(t)z'(x),\\ \partial_{xx} v(t,x) &= w(t)z''(x).\end{aligned}$$

Setzen wir $t = 0$, so muss gelten

$$\sin(x) = v(0,x) = w(0)z(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $z(x) = \sin(x)$ und $w(0) = 1$ lösen dies.
Setzen wir nun $v(t,x) = w(t)\sin(x)$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$0 = \partial_t v(t,x) - \Delta v(t,x) = w'(t)\sin(x) + w(t)\sin(x) = [w'(t) + w(t)]\sin(x)$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$, d.h.

$$w'(t) = -w(t)$$

für alle $t > 0$. Die Lösung für diese Differentialgleichung lautet

$$w(t) = Ce^{-t}$$

für alle $t \geq 0$ und einer Konstante $C \in \mathbb{R}$. Aus $w(0) = 1$ folgt direkt $C = 1$ und $w(t) = e^{-t}$ für alle $t \geq 0$. Demnach erhalten wir als Lösung v:

$$v(t,x) = e^{-t}\sin(x)$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$. □

(c) Wir machen wir den Ansatz

$$u(t,x) = \frac{v(t,x)}{g(t)}$$

für eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon [0,\infty)\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$ und einer stetig differenzierbaren Lösung v von dem Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}\partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v(t,x) = 0 \text{ auf } (0,\infty)\times\mathbb{R},\\ v(0,x) = \sin(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Partielle Ableitungen von u: Es gilt:

$$\begin{aligned}\partial_t u(t,x) &= \frac{\partial_t v(t,x)}{g(t)} - \frac{v(t,x)g'(t)}{g^2(t)},\\ \partial_x u(t,x) &= \frac{\partial_x v(t,x)}{g(t)},\\ \partial_{xx} u(t,x) &= \frac{\partial_{xx} v(t,x)}{g(t)}\end{aligned}$$

für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$.
Einsetzen und auflösen: Setzen wir dies in die Differentialgleichung ein und nutzen aus, dass v die obige Differentialgleichung löst, so folgt

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) + \cos(t) u(t,x) \\
&= \frac{\partial_t v(t,x)}{g(t)} - \frac{v(t,x) g'(t)}{g^2(t)} - \frac{\partial_{xx} v(t,x)}{g(t)} + \cos(t) \frac{v(t,x)}{g(t)} \\
&= \frac{\partial_t v(t,x) - \partial_{xx} v(t,x)}{g(t)} + \frac{\cos(t) g(t) - g'(t)}{g^2(t)} v(t,x) \\
&= \frac{\cos(t) g(t) - g'(t)}{g^2(t)} v(t,x) \\
\Leftrightarrow \ \cos(t) g(t) - g'(t) &= 0 \\
\Leftrightarrow \ g'(t) &= \cos(t) g(t).
\end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung für g: Führen wir eine Trennung der Variablen durch bekommen wir

$$\begin{aligned}
\log(g(t)) &= \int \frac{1}{g} \mathrm{d}g = \int \cos(t) \mathrm{d}t + C = \sin(t) + C \\
\Leftrightarrow \ g(t) &= \mathrm{e}^{\sin(t) + C}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Aufstellen der Lösung u: Die Lösung u lautet nun

$$u(t,x) = \frac{v(t,x)}{g(t)} = v(t,x) \mathrm{e}^{-\sin(t) - C}$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.
Anfangsbedingung beachten: Wegen

$$\begin{aligned}
\sin(x) = u(0,x) &= v(0,x) \mathrm{e}^{-\sin(0) - C} = \sin(x) \mathrm{e}^{-C} \\
\Leftrightarrow \ \mathrm{e}^{C} &= 1 \\
\Leftrightarrow \ C &= 0,
\end{aligned}$$

da v das Anfangsproblem aus (b) löst. Damit lautet g nun:

$$g(t) = \mathrm{e}^{\sin(t)}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, sowie für u:

$$u(t,x) = v(t,x) \mathrm{e}^{-\sin(t)} = \mathrm{e}^{-(t + \sin(t))} \sin(x)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. $\square$