KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE
INSTITUT FÜR ANALYSIS
Dr. I. Anapolitanos

WS 2019/2020
28.02.2020

HÖHERE MATHEMATIK III FÜR DIE FACHRICHTUNG PHYSIK

LÖSUNGSVORSCHLÄGE

Aufgabe 1 (10 + 10 = 20 Punkte)

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} v' + 2v + v^2 &= 8, \\ v(0) &= 0. \end{aligned}$$

Hinweis: Die obige Differentialgleichung ist eine Ricatti-Differentialgleichung und besitzt eine positive konstante Lösung.

b) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' - xy' - 2y &= 4x \\ y(0) &= 0, \\ y'(0) &= 2. \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit Hilfe des Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Geben Sie dabei die Koeffizienten a_n für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ explizit an.

Lösung von Aufgabe 1

a) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Dies ist eine inhomogene nicht-lineare Differentialgleichung erster Ordnung, genauer eine inhomogene Ricatti-Differentialgleichung.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt -1. Lösung erraten und Substitution zur homogenen Riccatti-Differentialgleichung: Wir sehen ein, dass $\widetilde{v}(x) = 2$, $x \in \mathbb{R}$, eine Lösung der Differentialgleichung ist, denn diese ist konstante Funktion stetig-differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit der Ableitung

$$\widetilde{v}'(x) = 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}$$

und es gilt:

$$\widetilde{v}'(x) + 2\widetilde{v}(x) + \widetilde{v}(x)^2 = 0 + 2 \cdot 2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also existiert eine Lösung der Differentialgleichung. Sei nun v die allgemeine Lösung der Differentialgleichung. Setze nun

$$u := v - \widetilde{v} = v - 2 \iff v = u + 2.$$

Dann gilt für die Ableitung von u:

$$u' = (v-2)' = v'.$$

Anschließendes Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt nach erster binomischer Formel

$$8 = v'(x) + 2v(x) + v(x)^2 = u'(x) + 2\,(u(x)+2) + (u(x)+2)^2 = u'(x) + 2u(x) + 4 + u(x)^2 + 4u(x) +$$

$$\Leftrightarrow \; u'(x) + 4u(x) + u(x)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \; u'(x) = -4u(x) - u(x)^2 = -\left(4u(x) + u(x)^2\right).$$

Also haben wir nun eine Differentialgleichung für u erhalten:

$$u' = -\left(4u + u^2\right).$$

Dies ist eine (homogene) Bernoulli-Differentialgleichung mit $n = 2$ und die beiden Differentialgleichungen sind äquivalent.

Schritt 0. Umformen und Substituieren in eine lineare Differentialgleichung: Dazu setzen wir die Hilfsfunktion z als

$$z := u^{1-n} = u^{1-2} = u^{-1} = \frac{1}{u}.$$

Diese hat laut der Kettenregel die Ableitung

$$z' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' = -\frac{u'}{u^2} = -u'u^{-2}.$$

Wegen der Differentialgleichungsvorschrift für u' folgt nun:

$$z' = -\frac{u'}{u^2} = -\frac{-\left(4u + u^2\right)}{u^2} = \frac{4u}{u^2} + \frac{u^2}{u^2} = 4 \cdot \frac{1}{u} + 1 = 4z + 1.$$

Also erhalten wir für z die Differentialgleichung

$$z' = 4z + 1.$$

Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung und die beiden Differentialgleichungen für u und für z sind äquivalent.

Schritt 1. Lösen der homogenen Differentialgleichung: Die homogene Differentialgleichung zu lautet

$$z_{\mathrm{h}}'(x) = 4z_{\mathrm{h}}(x).$$

Für die Lösung berechnen wir das unbestimmte Integral

$$\int 4\mathrm{d}x = 4x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Lösung z_{h} vom obigen homogenen Problem ist nun gegeben durch

$$z_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h}} \mathrm{e}^{\int 4\mathrm{d}x} = C_{\mathrm{h}} \mathrm{e}^{4x}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C_{\mathrm{h}} \in \mathbb{R}$.

Schritt 2. Herleitung der partikulären Lösung: Motiviert durch die Lösung z_{h} der homogenen Differentialgleichung machen wir hier den Ansatz der Variation der Konstanten:

$$z_{\mathrm{p}}(x) = C(x)\mathrm{e}^{4x}$$

für eine Funktion C und setzen die in die inhomogene Differentialgleichung ein. Wir haben für die Ableitung von z_p nach der Produkt- und Kettenregel:

$$z_\mathrm{p}'(x) = C'(x)\mathrm{e}^{4x} + C(x)\mathrm{e}^{4x} \cdot 4 = C'(x)\mathrm{e}^{4x} + 4 \cdot C(x)\mathrm{e}^{4x} = C'(x)\mathrm{e}^{4x} + 4z_\mathrm{p}(x).$$

Dann haben wir laut der inhomogenen Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} C'(x)\mathrm{e}^{4x} + 4z_\mathrm{p}(x) &= z_\mathrm{p}'(x) = 4z_\mathrm{p}(x) + 1 \\ \Leftrightarrow\ C'(x)\mathrm{e}^{4x} &= 1 \\ \Leftrightarrow\ C'(x) &= \mathrm{e}^{-4x}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet eine Möglichkeit die Funktion C zu wählen ist für $x \in \mathbb{R}$:

$$C(x) = \int_\infty^x \mathrm{e}^{-4s}\mathrm{d}s = -\frac{1}{4}\int_\infty^x -4\mathrm{e}^{-4s}\mathrm{d}s = -\frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{-4s}\right]_\infty^x = -\frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-4x} - 0\right) = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-4x}.$$

Dann gilt für die partikuläre Lösung:

$$z_\mathrm{p}(x) = C(x)\mathrm{e}^{4x} = -\frac{1}{4}\mathrm{e}^{4x}\mathrm{e}^{-4x} = -\frac{1}{4}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der allgemeinen Lösung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für z lautet nun

$$z(x) = z_\mathrm{p}(x) + z_\mathrm{h}(x) = -\frac{1}{4} + C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} = \frac{1}{4}\left(4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1\right)$$

mit einer Konstanten $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Rücksubstitution: Es gilt:

$$z(x) = \frac{1}{u(x)} \ \Leftrightarrow\ z(x)u(x) = 1 \ \Leftrightarrow\ u(x) = \frac{1}{z(x)}.$$

Also lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für u (per Rücksubstitution):

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{z(x)} = \frac{1}{\frac{1}{4}(4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1)} \\ &= \frac{4}{4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1} \end{aligned}$$

für eine Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1 \neq 0.$$

Genauer existiert zu jeder Konstante $C_\mathrm{h} \in \mathbb{R}$ höchstens eine Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1 = 0.$$

— bitte wenden —

Schritt 5. Aufstellen der allgemeinen Lösung: Die allgemeine Lösung der Dfferentialgleichung für v lautet

$$v(x) = u(x) + 2 = \frac{4}{4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1} + 2$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1 \neq 0.$$

Lösen des Anfangswertproblems:

Schritt 6. Aufstellen der speziellen Lösung vom Anfangswertproblem: Für die Lösung des Anfangswertproblems muss laut Aufgabenstellung gelten:

$$0 = v(0) = \frac{4}{4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4\cdot 0} - 1} + 2 = \frac{4}{4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{0} - 1} + 2 = \frac{4}{4C_\mathrm{h}\cdot 1 - 1} + 2 = \frac{4}{4C_\mathrm{h} - 1} + 2 \Leftrightarrow \frac{4}{4C_\mathrm{h} - 1} = -2$$

$$\Leftrightarrow\ 4 = -2\left(4C_\mathrm{h} - 1\right) = -8C_\mathrm{h} + 2$$

$$\Leftrightarrow\ -8C_\mathrm{h} = 2$$

$$\Leftrightarrow\ C_\mathrm{h} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Damit lautet wegen

$$-\mathrm{e}^{4x} - 1 = -\left(\mathrm{e}^{4x} + 1\right) < 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ die Lösung vom Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} v(x) &= \frac{4}{4C_\mathrm{h}\mathrm{e}^{4x} - 1} + 2 = \frac{4}{4\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot \mathrm{e}^{4x} - 1} + 2 = \frac{4}{-\mathrm{e}^{4x} - 1} + 2 = -\frac{4}{\mathrm{e}^{4x} + 1} + 2 \\ &= \frac{-4 + 2\left(\mathrm{e}^{4x} + 1\right)}{\mathrm{e}^{4x} + 1} = \frac{-4 + 2\mathrm{e}^{4x} + 2}{\mathrm{e}^{4x} + 1} = \frac{2\mathrm{e}^{4x} - 2}{\mathrm{e}^{4x} + 1} = \frac{2\left(\mathrm{e}^{4x} - 1\right)}{\mathrm{e}^{4x} + 1} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R} = (-\infty, \infty) =: I$. □

b) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Wir machen hier den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Koeffizienten $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$, d.h. wir haben für die Ableitungen:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 x^{1-1} + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}. \end{aligned}$$

Lösen der Differentialgleichung:

Schritt 1. Mindest-Konvergenzbereich bestimmen: Alle Koeffizienten und die Inhomogenität sind Polynome und haben daher Konvergenzradius unendlich, nach der Vorlesung hat demnach auch die Lösung y einen Konvergenzradius von unendlich.

Schritt 2. Potenzreihenansatz einsetzen in die Differentialgleichung: Setzen wir den Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ in die Differentialgleichung ein, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
0+4x = 4x = y''(x) - xy'(x) - 2y(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+2-1)\,a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\,a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)\,a_{n+2} x^n - n a_n x^n - 2a_n x^n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - n a_n - 2a_n]\,x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - (n+2)\,a_n]\,x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)[(n+1)\,a_{n+2} - a_n]\,x^n \\
&= (0+2)[(0+1)\,a_{0+2} - a_0]\,x^0 + (1+2)[(1+1)\,a_{1+2} - a_1]\,x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)[(n+1)\,a_{n+2} - a_n]\,x^n \\
&= 2\cdot[1\cdot a_2 - a_0]\cdot 1 + 3\cdot[2\cdot a_3 - a_1]\,x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)[(n+1)\,a_{n+2} - a_n]\,x^n \\
&= 2(a_2 - a_0) + 3(2a_3 - a_1)\,x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)[(n+1)\,a_{n+2} - a_n]\,x^n
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 3. Koeffizientenvergleich: Nach dem Identitätssatz für Potenzreihen können wir nun die Koeffizienten der rechten und linken Seite miteinander vergleichen, daher muss für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gelten:

$$
\begin{aligned}
2(a_2 - a_0) &= 0 \\
\Leftrightarrow\ a_2 - a_0 &= 0 \\
\Leftrightarrow\ a_2 &= a_0, \\
3(2a_3 - a_1) &= 4 \\
\Leftrightarrow\ 2a_3 - a_1 &= \frac{4}{3} \\
\Leftrightarrow\ 2a_3 &= \frac{4}{3} + a_1 \\
\Leftrightarrow\ a_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3} + a_1\right) = \frac{2}{3} + \frac{a_1}{2} \Leftrightarrow\ (n+2)[(n+1)\,a_{n+2} - a_n] \qquad = 0 \\
\Leftrightarrow\ (n+1)\,a_{n+2} - a_n &= 0 \\
\Leftrightarrow\ (n+1)\,a_{n+2} &= a_n \\
\Leftrightarrow\ a_{n+2} &= \frac{a_n}{n+1}
\end{aligned}
$$

Demnach erhalten wir induktiv für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
a_{2k+2} &= \frac{a_{2k}}{2k+1} = \frac{a_2}{\prod\limits_{l=1}^{k} (2l+1)}, \\
a_{2k+3} = a_{(2k+1)+2} &= \frac{a_{2k+1}}{2k+1+1} = \frac{a_{2k+1}}{2k+2} = \frac{a_{2k+1}}{2\,(k+1)} \\
&= \frac{a_3}{\prod\limits_{l=1}^{k} 2\,(l+1)} = \frac{a_3}{2^k \prod\limits_{l=1}^{k} (l+1)} = \frac{a_3 2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k} (l+1)}.
\end{aligned}
$$

Zusammenfassend haben wir nun:

$$
a_{2k+2} = \frac{a_2}{\prod\limits_{l=1}^{k} (2l+1)} \text{ und } a_{2k+3} = \frac{a_3 2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k} (l+1)} \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0.
$$

Schritt 4. Die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung aufstellen: Damit haben wir als Lösung y der Differentialgleichung:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = a_0 \cdot 1 + a_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} x^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+3} x^{2k+3} \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_2}{\prod\limits_{l=1}^{k} (2l+1)} x^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_3 2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k} (l+1)} x^{2k+3} \\
&= a_0 + a_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_0}{\prod\limits_{l=1}^{k} (2l+1)} x^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{2}{3} + \frac{a_1}{2}\right) 2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k} (l+1)} x^{2k+3}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

<u>Lösen vom Anfangswertproblem:</u>

Schritt 5. Die spezielle Lösung y vom Anfangswertproblem aufstellen: Die Anfangsdaten ergeben die Werte a_0 und a_1:

$$
\begin{aligned}
0 &= y(0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0^n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 \cdot a_n = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 0 = a_0 + 0 = a_0, \\
2 &= y'(0) = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot 0^{n-1} = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} 0 = a_1 + 0 = a_1
\end{aligned}
$$

Weiter folgt nun aus der obigen Vorschrift:

$$
\begin{aligned}
&a_2 = a_0 = 0, \\
&a_3 = \frac{2}{3} + \frac{a_1}{2} = \frac{2}{3} + \frac{2}{2} = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}, a_{2k+2} \qquad = \frac{a_2}{\prod\limits_{l=1}^{k} (2l+1)} = \frac{0}{\prod\limits_{l=1}^{k} (2l+1)} = 0,
\end{aligned}
$$

$$a_{2k+3} = \frac{a_3 2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} = frac\frac{5}{3} \cdot 2^{-k} \prod_{l=1}^{k}(l+1) = \frac{5 \cdot 2^{-k}}{3\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Also lautet die Lösung vom Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+2} x^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+3} x^{2k+3} \\
&= 0 + 2x + \sum_{k=0}^{\infty} 0 \cdot x^{2k+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{-k}}{3\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+3} \\
&= 2x + \sum_{k=0}^{\infty} 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{-k}}{3\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+3} \\
&= 2x + 0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{-k}}{3\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+3} \\
&= 2x + \frac{5}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{-k}}{\prod\limits_{l=1}^{k}(l+1)} x^{2k+3}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Aufgabe 2 (4 + 6 + (2 + 8) = 20 Punkte)

a) Überführen Sie das Differentialgleichungssystem $\begin{cases} w''(t) = -w(t) - v(t) \\ v'''(t) = -v''(t) + w(t), \end{cases}$ in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Sie müssen das System nicht lösen.

b) Wir betrachten die Matrix $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Gegeben ist, dass $e^{tB} = \begin{pmatrix} e^t\cos(t) & e^t\sin(t) \\ -e^t\sin(t) & e^t\cos(t) \end{pmatrix}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,' = B\vec{y} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)\left(\lambda^2 + 1\right)$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}\,' = A\vec{y}$.

Lösung von Aufgabe 2

a) Es gilt:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ w' \\ v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w' \\ w'' \\ v' \\ v'' \\ v''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w' \\ -w - v \\ v' \\ v'' \\ w - v'' \end{pmatrix}.$$

Setze

$$y_0 := w,\ y_1 := w', y_2 := v,\ y_3 := v' \text{ und } y_4 := v'',$$

sowie

$$\vec{y}(t) := \begin{pmatrix} y_0(t) \\ y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}(t) \in \mathbb{R}^5 \text{ und } A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5},$$

so ist das Differentialgleichungssystem äquivalent zu

$$\vec{y}\,'(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} w \\ w' \\ v \\ v' \\ v'' \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} w' \\ -w - v \\ v' \\ v'' \\ w - v'' \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -y_0 - y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_0 - y_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\vec{y}(t) = Ay(t).$$

Dies ist ein homogenes lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung. $\square$
b) Es gilt für die Matrixexponentialfunktion

$$\mathrm{e}^{tB} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t\cos(t) & \mathrm{e}^t\sin(t) \\ -\mathrm{e}^t\sin(t) & \mathrm{e}^t\cos(t) \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Setze

$$\vec{b}(t) := \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ \vec{y}_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ t_0 := 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, so lautet das Anfangswertproblem:

$$\vec{y}\,'(t) = B\vec{y}(t) + \begin{pmatrix} 0 & e^t \end{pmatrix} = B\vec{y}(t) + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B\vec{y}(t) + \vec{b}(t),\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{y}_0.$$

Die Lösung $\vec{y}$ ist laut Vorlesung nun gegeben über die Variation der Konstanten-Formel:

$$\begin{aligned}
\vec{y}(t) &= \mathrm{e}^{tB}\vec{y}_0 + \mathrm{e}^{tB}\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-sB}\vec{b}(s)\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\int_0^t \mathrm{e}^{-s}\begin{pmatrix} \cos(-s) & \sin(-s) \\ -\sin(-s) & \cos(-s) \end{pmatrix}\mathrm{e}^s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ -2\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} \cos(s) & -\sin(s) \\ \sin(s) & \cos(s) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\int_0^t \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ \cos(s) \end{pmatrix}\mathrm{d}s \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} \cos(s) \\ \sin(s) \end{pmatrix}\right]_0^t \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \sin(0) \end{pmatrix}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(t) - 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t)\,(\cos(t) - 1) + \sin^2(t) \\ -\sin(t)\,(\cos(t) - 1) + \sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos^2(t) - \cos(t) + \sin^2(t) \\ -\sin(t)\cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t) \end{pmatrix} \\
&= 2\mathrm{e}^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 - \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 1 - \cos(t) \\ -2\sin(t) + \sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{e}^t \begin{pmatrix} 1 + \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

nach dem trigomometrischen Pythagoras für alle $t \in \mathbb{R}$. □

c) (i) Nach der Regel von Sarrus gilt:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I_3) &= \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\
&= -\lambda(2-\lambda)(-1-\lambda) + 1\cdot 1\cdot 1 + 0\cdot 0\cdot(-3) - 1\cdot(2-\lambda)\cdot 0 - (-3)\cdot 1\cdot(-\lambda) - (-1-\lambda)\cdot 0\cdot 1 \\
&= \lambda(2-\lambda)(1+\lambda) + 1 + 0 - 0 - 3\lambda - 0 \\
&= \lambda\left(2 - \lambda + 2\lambda - \lambda^2\right) + 1 - 3\lambda \\
&= \lambda\left(2 + \lambda - \lambda^2\right) + 1 - 3\lambda \\
&= 2\lambda + \lambda^2 - \lambda^3 + 1 - 3\lambda \\
&= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1 \\
&= (\lambda - 1)\left(-\lambda^2 - 1\right) = -(\lambda-1)\left(\lambda^2+1\right)
\end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. □

(ii) **Schritt 1. Charakteristisches Polynom und Nullstellen bestimmen/ Eigenwerte bestimmen**: Nach dem Aufgabenteil b) (i) gilt für das charakteristische Polynom:

$$p(\lambda) := \det(A - \lambda I_3) = -(\lambda-1)\left(\lambda^2+1\right) = -(\lambda-1)(\lambda-\mathrm{i})(\lambda+\mathrm{i})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Also hat p drei einfache Nullstelle bei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$ und $\lambda_3 = \mathrm{i}$.

Schritt 2. Eigenräume bestimmen: Es gilt für die Eigenräume:

$$\begin{aligned}
E_1 &= \ker(A - 1\cdot I_3) = \ker\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}, \\
E_{-\mathrm{i}} &= \ker(A - (-\mathrm{i})\cdot I_3) = \ker\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 & 0 \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 1 \\ 1 & -3 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 1 \\ 1 & -3 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2+\mathrm{i} & 1 \\ 0 & -3+\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2+\mathrm{i}}{5} \\ 0 & -3+\mathrm{i} & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \\
&= \ker\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1+2\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2+\mathrm{i}}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \\ -5 \end{pmatrix}\right\}, \\
E_{\mathrm{i}} &= \overline{E_{-\mathrm{i}}} = \overline{\operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} \\ -5 \end{pmatrix}\right\}} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} \\ -5 \end{pmatrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Schritt 3. Fundamentallösungen bestimmen: Die erste Fundamentallösung lautet

$$\Phi_1(t) = \mathrm{e}^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathrm{e}^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \\ -\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Für die zweite und dritte Fundamentallösung formen wir nach der Eulerschen Formel/ Formel von de Moivre um:

$$\begin{aligned}
e^{\lambda_2 t}\begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-i \\ -5 \end{pmatrix} = e^{-it}\begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-i \\ -5 \end{pmatrix} &= (\cos(t) - i\sin(t))\begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-i \\ -5 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\sin(t) + 2i\cos(t) - i\sin(t) \\ 2\cos(t) - \sin(t) - i\cos(t) - 2i\sin(t) \\ -5\cos(t) + 5i\sin(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\sin(t) \\ 2\cos(t) - \sin(t) \\ -5\cos(t) \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) \\ -\cos(t) - 2\sin(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Also lauten die beiden weiteren Fundamentallösungen:

$$\Phi_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + 2\sin(t) \\ 2\cos(t) - \sin(t) \\ -5\cos(t) \end{pmatrix},$$

$$\Phi_3(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) \\ -\cos(t) - 2\sin(t) \\ 5\sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Fundamentalmatrix aufstellen: Die zugehörige Fundamentalmatrix Φ besteht nun aus den drei bestimmten Fundamentallösungen:

$$\Phi(t) := \begin{pmatrix} \Phi_1(t) & \Phi_2(t) & \Phi_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & \cos(t) + 2\sin(t) & 2\cos(t) - \sin(t) \\ e^t & 2\cos(t) - \sin(t) & -\cos(t) - 2\sin(t) \\ -e^t & -5\cos(t) & 5\sin(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die drei Fundamentallösungen Φ_1, Φ_2 und Φ_3 bilden die Fundamentalbasis. □

Aufgabe 3 (8 + (8 + 4) = 20 Punkte)

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + y = \cos(x).$$

b) Wir betrachten die Differentialgleichung

$$\left(x + 1 + y^3 + y^2\right)\mathrm{d}x + \left(3y^2 + 2y\right)\mathrm{d}y = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist und bestimmen Sie einen Multiplikator $\mu = \mu(x)$ so, dass die Differentialgleichung nach Multiplikation mit $\mu(x)$ exakt wird. Bestimmen Sie die Lösungen der Differentialgleichung in der Form $F(x, y) = c$.

(ii) Erklären Sie eine mögliche physikalische Bedeutung der Kurven $F(x, y) = c$ des Teils (i) mit Hilfe des Begriffs der Arbeit.

Lösung von Aufgabe 3

a) Typ der Differentialgleichung bestimmen: Es handelt sich hierbei um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.
Lösen der Differentialgleichung:
Schritt 1. Charakteristisches Polynom aufstellen und Nullstellen bestimmen: Für das charakteristische Polynom gilt:

$$p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Wir haben als nicht-reelle/ echt-komplexe einfache Nullstellen $\lambda_1 = -\mathrm{i}$ und $\lambda_2 = \mathrm{i}$.
Schritt 2. Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung: Da die Nullstellen $\lambda_{1,2} = \mp\mathrm{i}$ nicht-reell/ echt-komplex sind, erhalten wir nach der Formel von de Moivre/ Eulerschen Formel:

$$\mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir, da es sich um einfache Nullstellen handelt, die folgenden zwei Fundamentallösungen:

$$\Phi_1(x) = \cos(x) \text{ und } \Phi_2(x) = \sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Da es sich um einfache Nullstellen handelt, haben wir als Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$y_{\mathrm{h}}(x) = C_{\mathrm{h},1}\Phi_1(x) + C_{\mathrm{h},2}\Phi_2(x) = C_{\mathrm{h},1}\cos(x) + C_{\mathrm{h},2}\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$.
Schritt 3. Aufstellen der partikulären Lösung: Setze

$$q \equiv 1 \text{ auf } \mathbb{R},\ \sigma = 0 \text{ und } \omega = 1,$$

so hat die Inhomogenität die folgende Form:

$$f(x) = \cos(x) = 1 \cdot 1\cos(1 \cdot x) = q(x)\mathrm{e}^0\cos(\omega x) = q(x)\mathrm{e}^{0\cdot x}\cos(\omega x) = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und

$$\lambda = \sigma + \mathrm{i}\omega = 0 + \mathrm{i} \cdot 1 = \mathrm{i} = \lambda_2$$

ist eine einfache Nullstelle vom charakteristischen Polynom p nach Schritt 1., d.h. die Lösung y_p der partikulären Gleichung hat laut der Vorlesung die Form

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}(x) &= x^1\left[q_1(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x) + q_2(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x)\right] \\ &= x\Big[q_1(x)\mathrm{e}^{0\cdot x}\cos(1\cdot x) + q_2(x)\mathrm{e}^{0\cdot x}\sin(1\cdot x)\Big] \\ &= x\Big[q_1(x)\mathrm{e}^{0}\cos(x) + q_2(x)\mathrm{e}^{0}\sin(x)\Big] = x\left[q_1(x)\cdot 1\cdot\cos(x) + q_2(x)\cdot 1\cdot\sin(x)\right] \\ &= q_1(x)x\cos(x) + q_2(x)x\sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ sind, wobei $q_1, q_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome vom Grad gleich $\deg(q) = 0$ sind, d.h. es existieren zwei Konstanten $C_{\mathrm{p},1}, C_{\mathrm{p},2} \in \mathbb{R}$ mit

$$q_1 \equiv C_{\mathrm{p},1} \text{ und } q_2 \equiv C_{\mathrm{p},2} \text{ auf } \mathbb{R}.$$

Dies bedeutet für die Lösung y_p der partikulären Gleichung:

$$y_\mathrm{p}(x) = q_1(x)x\cos(x) + q_2(x)x\sin(x) = C_{\mathrm{p},1}x\cos(x) + C_{\mathrm{p},2}x\sin(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Weiter ist die Funktion y_p zweimal stetig-differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit den Ableitungen:

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}'(x) &= C_{\mathrm{p},1}\cos(x) - C_{\mathrm{p},1}x\sin(x) + C_{\mathrm{p},2}\sin(x) + C_{\mathrm{p},2}x\cos(x), \\ y_\mathrm{p}''(x) &= -C_{\mathrm{p},1}\sin(x) - C_{\mathrm{p},1}\sin(x) - C_{\mathrm{p},1}x\cos(x) + C_{\mathrm{p},2}\cos(x) + C_{\mathrm{p},2}\cos(x) - C_{\mathrm{p},2}x\sin(x) \\ &= -2C_{\mathrm{p},1}\sin(x) - C_{\mathrm{p},1}x\cos(x) + 2C_{\mathrm{p},2}\cos(x) - C_{\mathrm{p},2}x\sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Eingesetzt in die inhomogene Differentialgleichung erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \cos(x) = y_\mathrm{p}''(x) + y_\mathrm{p}(x) &= -2C_{\mathrm{p},1}\sin(x) - C_{\mathrm{p},1}x\cos(x) + 2C_{\mathrm{p},2}\cos(x) - C_{\mathrm{p},2}x\sin(x) + C_{\mathrm{p},1}x\cos(x) + C_{\mathrm{p},2}x\sin(x) \\ &= -2C_{\mathrm{p},1}\sin(x) + 2C_{\mathrm{p},2}\cos(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nach Koeffizientenvergleich, weil Sinus und Cosinus zu einander linear unabhängig sind, dass

$$\begin{aligned} -2C_{\mathrm{p},1} = 0 &\iff C_{\mathrm{p},1} = 0, \\ 2C_{\mathrm{p},2} = 1 &\iff C_{\mathrm{p},2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

gilt. Damit lautet nun die Lösung y_p der partikulären Gleichung:

$$\begin{aligned} y_\mathrm{p}(x) &= C_{\mathrm{p},1}x\cos(x) + C_{\mathrm{p},2}x\sin(x) = 0\cdot x\cos(x) + \frac{1}{2}\cdot x\sin(x) \\ &= 0 + \frac{x}{2}\sin(x) = \frac{x}{2}\sin(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Schritt 4. Aufstellen der allgemeinen Lösung: Die allgemeine Lösung y der Differentialgleichung lautet nun

$$y(x) = y_\mathrm{p}(x) + y_\mathrm{h}(x) = \frac{x}{2}\sin(x) + C_{\mathrm{h},1}\cos(x) + C_{\mathrm{h},2}\sin(x)$$

— bitte wenden —

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_{\mathrm{h},1}, C_{\mathrm{h},2} \in \mathbb{R}$. $\square$

b) (i) Wir setzen erstmal

$$P(x,y) = x + 1 + y^3 + y^2 \text{ und } Q(x,y) = 3y^2 + 2y$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Schritt 1. Überprüfen auf Exaktheit: Weiter gilt für die partiellen Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) = 3y^2 + 2y = y\,(3y+2) = 3y\left(y + \frac{2}{3}\right),\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) = 0
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Damit ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
3y\left(y + \frac{2}{3}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) = 0\\
\Leftrightarrow \ y &\in \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\}
\end{aligned}$$

gilt, aber die Menge

$$M := \mathbb{R} \times \left\{-\frac{2}{3}, 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

ist kein Gebiet (da sie nicht offen ist). Also gilt für alle Gebiete $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y) \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega \backslash M$, d.h. die Differentialgleichung ist nicht-exakt.

Schritt 2. Eulerschen Multiplikator aufstellen: Laut dem Hinweis können wir ein $\eta = \eta\,(x)$ finden, d.h. $\varphi(x,y) = x$. Damit ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) = 1 \text{ und } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) = 0.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} Q(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} P(x,y)}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\varphi(x,y) \cdot P(x,y) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x,y) \cdot Q(x,y)} &= \frac{0 - \left(3y^2 + 2y\right)}{0 \cdot (x + 1 + y^3 + y^2) - 1 \cdot (3y^2 + 2y)}\\
&= \frac{-\left(3y^2 + 2y\right)}{0 - (3y^2 + 2y)}\\
&= \frac{-\left(3y^2 + 2y\right)}{-(3y^2 + 2y)}\\
&= 1 = h\,(x) = h\,(\varphi(x,y))
\end{aligned}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Daraus folgt nun für η:

$$\eta(z) = \mathrm{e}^{\int h(z)\mathrm{d}z} = \mathrm{e}^{\int 1 \mathrm{d}z} = \mathrm{e}^z$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Damit gilt nun:

$$\eta\,(x) = \eta\,(\varphi(x,y)) = \mathrm{e}^x \neq 0$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.
Die folgende Differentialgleichung ist nun exakt auf $\mathbb{R}^2$

$$\widetilde{P}(x,y)\mathrm{d}x + \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = 0$$

mit

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}(x,y) &= \eta(x)P(x,y) = \mathrm{e}^x\left(x + 1 + y^3 + y^2\right) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + y^3\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x,\\
\widetilde{Q}(x,y) &= \eta(x)Q(x,y) = \mathrm{e}^x\left(3y^2 + 2y\right) = 3y^2\mathrm{e}^x + 2y\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Also finden wir eine stetig-differenzierbare Funktionen $\widetilde{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass

$$\nabla\widetilde{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \widetilde{P}(x,y) \\ \widetilde{Q}(x,y) \end{pmatrix} \text{ für alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

ist.
Schritt 3. Finden einer Stammfunktion $\widetilde{F}$: Dazu integrieren wir z.B. die y-Ableitung von $\widetilde{F}$ (also $\widetilde{Q}$) bzgl. der zweiten Komponente:

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}(x,y) &= \int \widetilde{Q}(x,y)\mathrm{d}y = \int \left(3y^2\mathrm{e}^x + 2y\mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}y\\
&= y^3\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x + C(x)
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ und einer stetig-differenzierbaren Funktion $C\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Weiter gilt nun:

$$\begin{aligned}
x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + y^3\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x = \widetilde{P}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{F}(x,y)\\
&= y^3\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x + C'(x) \Leftrightarrow \ C'(x) &&= x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x = (1+x)\mathrm{e}^x
\end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Damit erhalten wir für die Funktion C nach partieller Integration

$$\begin{aligned}
C(x) &= \int C'(x)\mathrm{d}x = \int (1+x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\\
&= [(1+x)\mathrm{e}^x] - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = (1+x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C = (1+x-1)\mathrm{e}^x + C\\
&= x\mathrm{e}^x + C
\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und einer Konstante $C \in \mathbb{R}$. O.B.d.A. wählen wir $C = 0$, d.h. es ist

$$C(x) = x\mathrm{e}^x \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Damit lautet die Stammfunktion $\widetilde{F}$:

$$\widetilde{F}(x,y) = y^3\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x + C(x) = y^3\mathrm{e}^x + y^2\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = \left(y^3 + y^2 + x\right)\mathrm{e}^x$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Schritt 4. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung: Es gilt:

$$0 = \widetilde{Q}(x,y) = \mathrm{e}^x\left(3y^2 + 2y\right) = 3\mathrm{e}^x y\left(y + \frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \; y\left(y+\frac{2}{3}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \; (x,y)\in\mathbb{R}\times\left\{-\frac{2}{3},0\right\}=M$$

für $x,y\in\mathbb{R}$. Also finden wir für alle Paare $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\backslash M$ein Intervall $I_x\subseteq\mathbb{R}$ mit $x_0\in I_x$ so, dass es eine eindeutige stetig-differenzierbare Funktion $y\colon I_x\to\mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{2}{3},0\right\}$ gibt mit

$$\left(y^3+y^2+x\right)\mathrm{e}^x=\widetilde{F}(x,y(x))=\widetilde{F}(x_0,y_0)=\left(y_0^3+y_0^2+x_0\right)\mathrm{e}^{x_0}\text{ für alle }x\in I_x.$$

Damit löst y auf I_x die obige Differentialgleichung und wegen $\eta\neq 0$ auch die ursprüngliche Differentialgleichung. □

(ii) Eine mögliche Physikalische Bedeutung ist vorstellbar, wenn wir das Vektorfeld

$$\begin{pmatrix} x+1+y^3+y^2 \\ 3y^2+2y \end{pmatrix}$$

als Kraftfeld betrachten. In diesem Fall sind die Lösungen der Differentialgleichung gerade die Kurven, entlang denen die Kraft keine Arbeit erzeugt oder vernichtet.

Aufgabe 4 (14 + 6 = 20 Punkte)

a) Geben Sie alle Funktionen $u\colon [0,1]\times(0,\infty)\to\mathbb{R}$ mit

$$u_{tt} = u_{xx}\,, \qquad x\in(0,1), \quad t>0,$$

an, die die Form $u(x,t) = v(x)w(t)$ besitzen und die Randbedingungen

$$u(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0$$

für alle $t>0$ erfüllen.

b) Lösen Sie mit Hilfe der Methode der Charakteristiken das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t(x,t) + 2u_x(x,t) &= u(x,t), \quad x,t\in\mathbb{R} \\ u(x,0) &= x. \end{aligned}$$

Lösung von Aufgabe 4

a) **Schritt 1. Ansatz aufstellen und ableiten**: Wir machen den Separationsansatz

$$u(x,t) = v(x)w(t).$$

Es ergeben sich die Ableitungen

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) &= v(x)w'(t), \\ \partial_{tt} u(x,t) &= v(x)w''(t), \\ \partial_x u(x,t) &= v'(x)w(t), \\ \partial_{xx} u(x,t) &= v''(x)w(t). \end{aligned}$$

Schritt 2. Ansatz einsetzen und Umformen: Setzen wir dies nun ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} v(x)w''(t) = \partial_{tt}u(x,t) &= \partial_{xx}u(x,t) = v''(x)w(t) \\ \Leftrightarrow \quad \frac{w''(t)}{w(t)} &= \frac{v''(x)}{v(x)}. \end{aligned}$$

Schritt 3. Separationskonstante und Differentialgleichungen lösen: Da dies für alle t und x gelten muss, müssen die beiden Quotienten

$$\frac{w'(t)}{w(t)} \text{ und } \frac{v''(x)}{v(x)}$$

gleich und konstant einem λ^2 sein mit $\lambda\in\mathbb{C}$, d.h.

$$\frac{w''(t)}{w(t)} = \lambda^2 = \frac{v''(x)}{v(x)}.$$

Durch Umformen ergeben sich so die beiden Differentialgleichungen

$$w''(t) = \lambda^2 w(t),$$

$$v''(x) = \lambda^2 v(x).$$

Beides sind lineare homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, diese lösen wir nun.
Lösung zu w und v: Umgestellt bekommen wir

$$v''(x) - \lambda^2 v(x) = 0.$$

Das charakteristische Polynom dazu lautet

$$p(\mu) = \mu^2 - \lambda^2 = (\mu - \lambda)(\mu + \lambda)$$

mit Nullstellen in $\mu = \pm\lambda$. Als Lösung folgt nun

$$v(x) = C_1 \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2 \mathrm{e}^{\lambda x}$$

falls $\lambda \neq 0$ und sonst $(\lambda = 0)$

$$v(x) = C_1 + C_2 x$$

für jeweils alle $x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten C_1, C_2.
Analog erhalten wir als Lösung w:

$$w(t) = D_1 \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2 \mathrm{e}^{\lambda t}$$

falls $\lambda \neq 0$ und sonst $(\lambda = 0)$

$$w(t) = D_1 + D_2 t$$

für jeweils alle $t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten D_1, D_2.
Schritt 4. Randdaten beachten: Ist nun $\lambda = 0$, so erhalten wir für u:

$$u^{(0)}(x,t) = v^{(0)}(x) w^{(0)}(t) = \left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)} x\right)\left(D_1^{(0)} + D_2^{(0)} t\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$, bzw. für $\lambda \neq 0$

$$u^{(\lambda)}(x,t) = v^{(\lambda)}(x) w^{(\lambda)}(t) = \left(C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda x}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Wir möchten nun, dass die Randbedingung

$$u^{(\lambda)}(0,t) = 0 = \partial_x u^{(\lambda)}(1,t)$$

für alle zulässigen λ und für alle $t > 0$ erfüllt ist, dafür berechnen wir die Ableitungen

$$\begin{aligned}
\partial_x u^{(0)}(x,t) &= C_2^{(0)} \left(D_1^{(0)} + D_2^{(0)} t\right) \\
\partial_x u^{(\lambda)}(x,t) &= \left(-C_1^{(\lambda)} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right) \\
&= \lambda \left(-C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda x} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda x}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right).
\end{aligned}$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$. Wenn $D_1^{(\lambda)} = D_2^{(\lambda)} = 0$ für ein zulässiges $\lambda \in \mathbb{C}$ ist, so folgt direkt, dass $w^{(\lambda)} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$ ist, d.h. $u^{(\lambda)} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^2$.
Fall 1. $\lambda = 0$:
Aus

$$0 = u^{(0)}(0,t) = \left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)} \cdot 0\right)\left(D_1^{(0)} + D_2^{(0)} t\right) = \left(C_1^{(0)} + 0\right)\left(D_1^{(0)} + D_2^{(0)} t\right) = C_1^{(0)} \left(D_1^{(0)} + D_2^{(0)} t\right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt direkt, dass

$$C_1^{(0)} = 0 \text{ oder } D_1^{(0)} = D_2^{(0)} = 0$$

ist.
Aus

$$0 = \partial_x u^{(0)}(1,t) = C_2^{(0)}\left(D_1^{(0)} + D_2^{(0)} t\right)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt direkt, dass

$$C_2^{(0)} = 0 \text{ oder } D_1^{(0)} = D_2^{(0)} = 0$$

ist.
Fall 2. $\lambda \neq 0$:
Aus

$$\begin{aligned}
0 = u^{(\lambda)}(0,t) &= \left(C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 0} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda \cdot 0}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right) \\
&= \left(C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{0} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{0}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right) \\
&= \left(C_1^{(\lambda)} \cdot 1 + C_2^{(\lambda)} \cdot 1\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right) \\
&= \left(C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt direkt, dass

$$C_2^{(\lambda)} = -C_1^{(\lambda)} \text{ oder } D_1^{(\lambda)} = D_2^{(\lambda)} = 0$$

ist.
Aus

$$\begin{aligned}
0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} u^{(\lambda)}(1,t) &= \lambda\left(-C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda \cdot 1} + C_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda \cdot 1}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right) \\
&= \lambda\left(-C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda} - C_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right) \\
&= -C_1^{(\lambda)} \lambda\left(\mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right)
\end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt direkt, dass (da $\lambda \neq 0$ ist)

$$C_1^{(\lambda)} = 0 \text{ oder } D_1^{(\lambda)} = D_2^{(\lambda)} = 0 \text{ oder } \mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda} = 0$$

ist. Letzteres lässt sich äquivalent umformen zu:

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{-\lambda} + \mathrm{e}^{\lambda} = 0 \Leftrightarrow \ \mathrm{e}^{\lambda} &= -\mathrm{e}^{-\lambda} \\
\Leftrightarrow \ \mathrm{e}^{2\lambda} &= -1 \\
\Leftrightarrow \ 2\lambda &= \mathrm{i}(2k-1)\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow \ \lambda &= \mathrm{i}\frac{2k-1}{2}\pi \text{ für } k \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Aus $C_1^{(\lambda)} = 0$ folgt nun auch $C_2^{(\lambda)} = -C_1^{(\lambda)} = -0 = 0$ und damit ebenfalls $v^{(\lambda)} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$, was zu $u^{(\lambda)} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^2$ führt.

Insgesamt folgt nun

$$
\begin{aligned}
u^{(0)}(x,t) &= \left(C_1^{(0)} + C_2^{(0)} x\right)\left(D_1^{(0)} + D_2^{(0)} t\right) = 0,\\
u^{(\lambda_k)}(x,t) &= \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-\lambda_k x} + C_2^{(k)} \mathrm{e}^{\lambda_k x}\right)\left(D_1^{(k} \mathrm{e}^{-\lambda_k t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right)\\
&= \left(C_1^{(k)} \mathrm{e}^{-\lambda_k x} - C_1^{(k)} \mathrm{e}^{\lambda_k x}\right)\left(D_1^{(\lambda)} \mathrm{e}^{-\lambda t} + D_2^{(\lambda)} \mathrm{e}^{\lambda t}\right)\\
&= C_1^{(k)}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k-1}{2}\pi x} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k-1}{2}\pi x}\right)\left(D_1^{(k)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2k-1}{2}\pi t} + D_2^{(k)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k-1}{2}\pi t}\right)\\
&= C_1^{(k)}\left[\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) - \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right) - \mathrm{i}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi x\right)\right]\\
&\quad\cdot\left[D_1^{(k)}\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) - \mathrm{i}D_1^{(k)}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + D_2^{(k)}\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \mathrm{i}D_2^{(k)}\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right]\\
&= -2\mathrm{i}C_1^{(k)}\sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\left(D_1^{(k)} + D_2^{(k)}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \mathrm{i}\left(D_2^{(k)} - D_1^{(k)}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)
\end{aligned}
$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ wegen der Eulerschen Formel/ Formel von de Moivre und der Symmetrie von Sinus und Kosinus mit $\lambda_k = \mathrm{i}\frac{2k-1}{2}\pi$ und

$$
C_j^{(k)} := C_j^{(\lambda_k)} \text{ und } D_j^{(k)} := D_j^{(\lambda_k)}
$$

für $j = 1, 2$ und $k \in \mathbb{N}$.
O.B.d.A. wählen wir $C_1^{(k)} = \frac{\mathrm{i}}{2}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
Dann haben wir

$$
\begin{aligned}
u^{(k)}(x,t) &= -2\mathrm{i}C_1^{(k)}\sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\left(D_1^{(k)} + D_2^{(k)}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \mathrm{i}\left(D_2^{(k)} - D_1^{(k)}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)\\
&= \sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\left(D_1^{(k)} + D_2^{(k)}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \mathrm{i}\left(D_2^{(k)} - D_1^{(k)}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)
\end{aligned}
$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.
Schritt 5. Allgemeine Lösung u_N aufstellen: Sei $N \in \mathbb{N}$. Dann ist die (komplexwertige) Lösung u_N von der Form

$$
\begin{aligned}
u_N(x,t) &= u^{(0)}(x,t) + \sum_{k=1}^{N} u^{(k)}(x,t)\\
&= 0 + \sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\left(D_1^{(k)} + D_2^{(k)}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \mathrm{i}\left(D_2^{(k)} - D_1^{(k)}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)\\
&= \sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\left(D_1^{(k)} + D_2^{(k)}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \mathrm{i}\left(D_2^{(k)} - D_1^{(k)}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)
\end{aligned}
$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $D_1^{(k)}, D_2^{(k)} \in \mathbb{C}$ für $k \in \{1, \ldots, N\}$ bzw.

$$
u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\left(D_1^{(k)} + D_2^{(k)}\right)\cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \mathrm{i}\left(D_2^{(k)} - D_1^{(k)}\right)\sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)
$$

für alle $x \in [0,1]$ und $t \in (0,\infty)$ mit Konstanten $D_1^{(k)}, D_2^{(k)} \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$ so, dass die Reihe auf $[0,1] \times (0,\infty)$ konvergiert.
Damit ist die (reellwertige) Lösung u_N von der Form

$$u_N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} \sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\widetilde{D}_1^{(k)} \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \widetilde{D}_2^{(k)} \sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)$$

für alle $t, x \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $\widetilde{D}_1^{(k)}, \widetilde{D}_2^{(k)} \in \mathbb{R}$ für $k \in \{0,1,\dots,N\}$, bzw.

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{2k-1}{2}x\right)\left(\widetilde{D}_1^{(k)} \cos\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right) + \widetilde{D}_2^{(k)} \sin\left(\frac{2k-1}{2}\pi t\right)\right)$$

für alle $x \in [0,1]$ und $t \in (0,\infty)$ mit Konstanten $\widetilde{D}_1^{(k)}, \widetilde{D}_2^{(k)} \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ so, dass die Reihe auf $[0,1] \times (0,\infty)$ konvergiert. $\square$

b) **Schritt 1. Setting aufstellen**: Setzen wir

$$\begin{aligned} a(x,t,u) &= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ b(x,t,u) &= u(x,t), \\ f(x) &= x. \end{aligned}$$

Dann haben wir eine partielle Differentialgleichung der Form

$$\begin{cases} a(x,t,u) \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_t \end{pmatrix} u(x,t) = b(x,t,u) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}.$$

Schritt 2. Methode der Charakteristiken: Setze die Charakteristik k:

$$k(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \end{pmatrix},$$

sowie $w(s) := u(k(s))$. Dann erhalten wir durch Ableiten von w und Einsetzen von w und k in die Partielle Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} w'(s) &= \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_t \end{pmatrix} u\right)(k(s)) \cdot k'(s) = k'(s) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_t \end{pmatrix} u\right)(k(s)) \\ a(k(s), w(s)) \cdot \left(\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_t \end{pmatrix} u\right)(k(s)) &= b(k(s), w(s)). \end{aligned}$$

Ein Vergleich beider liefert nun das zu lösende Charakteristikensystem:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x'(s) \\ t'(s) \end{pmatrix} &= k'(s) = a(k(s), w(s)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ w'(s) &= b(k(s), w(s)) = w(s), \\ k(0) &= \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w(0) = u(k(0)) &= u(x_0, 0) = x_0. \end{aligned}$$

Schritt 3. Charakteristikensystem lösen:
Lösung für k: Es handelt sich bei t wie bei x um lineare Differentialgleichungen erster Ordnung, welche einfach zu lösen sind durch:

$$\begin{aligned} x(s) &= 2s + C_1, \\ t(s) &= s + C_2 \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Wegen den Anfangsbedingungen, $t(0) = 0$ und $x(0) = x_0$, erhalten wir:

$$\begin{aligned} t(s) &= s, \\ x(s) &= 2s + x_0 \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Damit lautet die Lösung k:

$$\begin{pmatrix} x(s) \\ t(s) \end{pmatrix} = k(s) = \begin{pmatrix} 2s + x_0 \\ s \end{pmatrix}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Lösung für w: Es handelt sich hierbei um eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung, welche ebenfalls einfach zu lösen ist. Die Lösung ist gegeben durch

$$w(s) = C_3 \mathrm{e}^s$$

für alle $s \in \mathbb{R}$ mit einer Konstanten $C_3 \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung $w(0) = x_0$ folgt nun:

$$w(s) = x_0 \mathrm{e}^s$$

für alle $s \in \mathbb{R}$.
Schritt 4. Nach s, x_0 **auflösen und einsetzen**: Lösen wir nach s auf, so erhalten wir:

$$s = t(s).$$

Lösen wir nach x_0 auf, so erhalten wir:

$$x_0 = x(s) - 2s = x(s) - 2t(s).$$

Eingesetzt liefert dies uns

$$\begin{aligned} u\left(x(s), t(s)\right) = u\left(k(s)\right) = w(s) &= x_0 \mathrm{e}^s \\ &= \left(x(s) - 2t(s)\right) \mathrm{e}^{t(s)} \end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{R}$. Somit hängt die rechte Seite auch nur noch von der gewählten Charakteristik k ab, d.h. die Lösung u lautet nun

$$u(t, x) = (x - 2t)\, \mathrm{e}^t$$

für alle Paare $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. $\square$