Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Modulprüfung

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2020/2021

8. März 2021

Schreiben Sie auf **jedes abzugebende Blatt** Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer und die Aufgabennummer. Beachten Sie die Hinweise auf dem Deckblatt.
Zum Bestehen der Klausur sind **27** von **80** Punkten hinreichend. Als Hilfsmittel ist ein handbeschriebenes DIN A4 Blatt erlaubt. Es ist kein Taschenrechner zugelassen.

Aufgabe 1 (20 Punkte):
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + y'' + 2y' + 2y = 3xe^{-x}.$$

Hinweis: -1 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Aufgabe 2 ($6 + 6 + 8 = 20$ Punkte):
Wir betrachten für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$(\star) \quad \begin{cases} y' = \left(1 + \beta^2 e^{-x^2} + y^2\right)^{\alpha}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Lösen Sie $(\star)$ für $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

(ii) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem $(\star)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

(iii) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem $(\star)$ gemäß eines Kriteriums aus der Vorlesung eine globale Lösung besitzt.
Hinweis: Sie müssen <u>nicht</u> beweisen, dass das Anfangswertproblem $(\star)$ für alle anderen α, β keine globale Lösung besitzt.

Aufgabe 3 ($7+6+7=20$ Punkte):

Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichungen mit Randwerten

$$(\star)\ \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & x_1, x_2 \in (0,\pi), t > 0, \\ u(x_1,0,t) = u(x_1,\pi,t) = 0, & x_1 \in [0,\pi], t > 0, \\ u(0,x_2,t) = u(\pi,x_2,t) = 0, & x_2 \in [0,\pi], t > 0, \end{cases}$$

$$(\diamond)\ \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,\pi), t > 0, \\ w(0,t) = w(\pi,t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(i) Es seien $w, z\colon [0,\pi]\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lösungen von $(\diamond)$. Zeigen Sie, dass durch $u(x_1,x_2,t) = w(x_1,t)z(x_2,t)$ eine Lösung von $(\star)$ gegeben ist.

(ii) Geben Sie alle Lösungen w von $(\diamond)$ an, welche die Form $w(x,t) = a(x)b(t)$ besitzen.

(iii) Bestimmen Sie eine Lösung u von $(\star)$ mit $u(x_1,x_2,0) = \sin(2x_1)\sin(3x_2)$.

Aufgabe 4 ($5+7+8=20$ Punkte):

Lösen Sie die inhomogene Wellengleichung

$$(\star)\ \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x), & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cosh(x)\mathrm{e}^{\sinh(x)}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(i) Finden Sie <u>eine</u> Lösung $\tilde{u}$ der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \sin(x)$, die nur von x abhängt.

(ii) Definieren Sie $w := u - \tilde{u}$. Bestimmen Sie dasjenige Anfangswertproblem, welches w löst.

(iii) Geben Sie mit Hilfe der Schritte (i) und (ii) die Lösung u des Problems $(\star)$ an. Rechnen Sie hierbei alle Integrale explizit aus.