Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
Prof. Dr. Wolfgang Reichel
M.Sc. Simon Kohler
M.Sc. Sebastian Ohrem

Lösungsvorschlag zur Modulprüfung
Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Wintersemester 2020/2021

8. März 2021

Aufgabe 1 (20 Punkte):
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + y'' + 2y' + 2y = 3x\mathrm{e}^{-x}.$$

Hinweis: -1 ist eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:
Die homogene Differentialgleichung lautet $y_h''' + y_h'' + 2y_h' + 2y_h = 0$. Wir setzen den Ansatz $y_h(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ in die homogene Differentialgleichung ein und erhalten damit für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$0 \overset{!}{=} y_h'''(x) + y_h''(x) + 2y_h'(x) + 2y_h(x) = \left(\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2\right)\mathrm{e}^{\lambda x}.$$

Somit lautet das charakteristische Polynom: $p(\lambda) := \lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda + 2$. Laut dem Hinweis ist -1 eine Nullstelle von p. Einsetzen bestätigt dies nochmals. Die Faktorisierung erhalten wir zum Beispiel durch raten oder Polynomdivision. Es gilt:

$$p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 2).$$

Somit sind $\lambda_1 := -1, \lambda_2 := \sqrt{2}\mathrm{i}, \lambda_3 := -\sqrt{2}\mathrm{i}$ alle Nullstellen von p und jede Nullstelle ist einfach. Ein komplexes Fundamentalsystem der Differentialgleichung lautet also $\{z_1, z_2, z_3\}$ mit:

$$z_1(x) := \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{-x}, \quad z_2(x) := \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}\mathrm{i}x}, \quad z_3(x) := \mathrm{e}^{\lambda_3 x} = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\mathrm{i}x}.$$

Ein reelles Fundamentalsystem erhalten wir durch die Real- und Imaginärteile des komplexen Fundamentalsystems. Dies entspricht einer geschickten Linearkombination, da die Differentialgleichung nur reelle Koeffizienten besitzt:

$$\begin{aligned} y_1(x) := z_1(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad y_2(x) &:= \mathrm{Re}(z_2(x)) = \frac{1}{2}\left(y_2(x) + y_3(x)\right) = \cos\left(\sqrt{2}x\right), \\ y_3(x) &:= \mathrm{Im}(z_2(x)) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(y_2(x) - y_3(x)\right) = \sin\left(\sqrt{2}x\right). \end{aligned}$$

Ein reelles Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung lautet also $\{y_1, y_2, y_3\}$. Es wird nun eine spezielle (partikuläre) Lösung benötigt. Wir beobachten, dass die rechte Seite die Form $3x\mathrm{e}^{-x} = q(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x)$ mit $q(x) = 3x$ (Polynom vom Grad 1), $\sigma = -1$ und $\omega = 0$ hat. Die Zahl $\sigma + \mathrm{i}\omega = -1$ ist eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms (setze $n := 1$). Wie in der Vorlesung machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = x^n\left(r(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\cos(\omega x) + s(x)\mathrm{e}^{\sigma x}\sin(\omega x)\right), \qquad r(x) := r_0 + r_1 x, \quad s(x) := s_0 + s_1 x.$$

Hierbei entspricht die Potenz im Monom am Anfang der Vielfachheit der Nullstelle $\sigma + \mathrm{i}\omega = -1$ im charakteristischen Polynom und r, s sind Polynome vom gleichen Grad wie q. Wir haben also den Ansatz

$y_p(x) = (r_0 x + r_1 x^2)\mathrm{e}^{-x}$. Wir berechnen die Ableitungen des Ansatzes:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y_p(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \mathrm{e}^{-x} + (r_0 x + r_1 x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x}, \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y_p(x) &= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x} + (r_0 x + r_1 x^2) \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{-x}, \\
\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} y_p(x) &= \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \mathrm{e}^{-x} + 3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x} \\
&\qquad + 3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{-x} + \big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben die Produktregel für höhere Ableitungen benutzt. Es empfiehlt sich, nicht die Ableitungen sofort auszurechnen, sondern zuerst in die DGL einzusetzen, Terme zu sortieren und dabei Auslöschungseffekte zu nutzen. Damit erhalten wir für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
3x\mathrm{e}^{-x} &\overset{!}{=} y_p'''(x) + y_p''(x) + 2y_p'(x) + 2y_p(x) \\
&= (r_0 x + r_1 x^2) \cdot \left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\mathrm{e}^{-x} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{-x} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \left(3\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\mathrm{e}^{-x} + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}\right) \\
&\quad + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \left(3\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}\big(r_0 x + r_1 x^2\big) \cdot \mathrm{e}^{-x} \\
&= (r_0 x + r_1 x^2) \cdot 0 + (r_0 + 2r_1 x) \cdot (3 - 2 + 2)\, \mathrm{e}^{-x} + 2r_1 \cdot (-3 + 1)\, \mathrm{e}^{-x} + 0 \cdot \mathrm{e}^{-x} \\
&= (3r_0 - 4r_1)\mathrm{e}^{-x} + 6r_1 x\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich liefert:

$$0 \overset{!}{=} 3r_0 - 4r_1, \quad 3 \overset{!}{=} 6r_1, \qquad \Leftrightarrow \qquad r_0 = \frac{2}{3}, \quad r_1 = \frac{1}{2}.$$

Eine spezielle Lösung lautet also $y_p(x) = x \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{2}x\right)\mathrm{e}^{-x}$. Damit sind die Lösungen der Differentialgleichung genau gegeben durch Funktionen der Form: $\exists\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
y(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) + y_p(x) \\
&= c_2 \cos\big(\sqrt{2}x\big) + c_3 \sin\big(\sqrt{2}x\big) + \left(c_1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{e}^{-x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 ($6+6+8=20$ Punkte):
Wir betrachten für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem

$$(\star) \quad \begin{cases} y' = \left(1+\beta^2 \mathrm{e}^{-x^2} + y^2\right)^\alpha, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

(i) Lösen Sie $(\star)$ für $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

(ii) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem $(\star)$ eine eindeutige Lösung besitzt.

(iii) Bestimmen Sie alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, für die das Anfangswertproblem $(\star)$ gemäß eines Kriteriums aus der Vorlesung eine globale Lösung besitzt.
Hinweis: Sie müssen nicht beweisen, dass das Anfangswertproblem $(\star)$ für alle anderen α, β keine globale Lösung besitzt.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Wir verwenden die Methode 'Trennung der Variablen':

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y' = 1+y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases} &&\iff \begin{cases} \frac{y'}{1+y^2} = 1, \\ y(0) = 0 \end{cases} \\ \iff &\int_0^{y(x)} \frac{1}{1+\xi^2} \mathrm{d}\xi = \int_0^x 1 \mathrm{d}\tau &&\iff \arctan(y(x)) - \arctan(0) = x - 0 \\ \iff &y(x) = \tan(x). \end{aligned}$$

Hierbei hat der Term $1+y^2$ keine Nullstellen. Somit ist $y(x) = \tan(x)$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems mit maximalem Exitenzintervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(ii) Für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) := (1+\beta^2 \mathrm{e}^{-x^2} + y^2)^\alpha$ eine C^1-Funktion als Komposition von C^1-Funktionen. Beachten Sie, dass der Term in der Klammer immer sogar größer gleich 1, also strikt positiv ist. Laut Vorlesung, Satz von Picard-Lindelöff, existiert ein maximales Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und eine Funktion $y\colon I \to \mathbb{R}$, sodass y die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $(\star)$ ist.

(iii) Sei f wie zuvor und $y\colon I \to \mathbb{R}$ die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems $(\star)$ mit maximalem Existenzintervall $I \subset \mathbb{R}$. Laut Vorlesung ist eine hinreichende Bedingung für $I = \mathbb{R}$: Es existiert eine Konstante $C > 0$ so, dass $|f(x,y)| \leq C(1+|y|)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.
Behauptung: Es gilt $[\ \exists C > 0\ \forall x, y \in \mathbb{R}\colon\ |f(x,y)| \leq C(1+|y|)\ ] \iff \alpha \leq \frac{1}{2}$.
Beweis: Wir machen eine Fallunterscheidung in 3 Fälle.
Fall 1: $\alpha \leq 0$.
Wegen $1+\beta^2 \mathrm{e}^{-x^2} + y^2 \geq 1$ ist $f(x,y) = |f(x,y)| \leq 1 \leq 1(1+|y|)$ und die Behauptung gilt.
Fall 2: $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$.
Wir rechnen für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} 1+\beta^2 \mathrm{e}^{-x^2} + y^2 &\leq 1+\beta^2+y^2 \leq 1+\beta^2+y^2+\beta^2 y^2 = (1+\beta^2)(1+y^2) \\ &\leq (1+\beta^2)(1+2|y|+y^2). \end{aligned}$$

Für die nächste Rechnung nutzen wir, dass die Abbildungen $(0,\infty) \ni z \mapsto z^\alpha$ (da $\alpha > 0$) und $(0,\infty) \ni z \mapsto b^z$ für $b \geq 1$ monoton wachsen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(x,y)| = \left(1+\beta^2 \mathrm{e}^{-x^2} + y^2\right)^\alpha &\leq \left((1+\beta^2)(1+2|y|+y^2)\right)^\alpha \\ &\leq \left((1+\beta^2)(1+2|y|+y^2)\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+\beta^2}(1+|y|). \end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung mit $C = \sqrt{1+\beta^2}$.
Alternativ Fall 1+2 in einem: $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

Für die nächste Rechnung nutzen wir, dass die Abbildungen $(0,\infty) \ni z \mapsto z^\alpha$ (da $\alpha > 0$) und $(0,\infty) \ni z \mapsto b^z$ für $b \geq 1$ monoton wachsen. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\left(1+\beta^2 \mathrm{e}^{-x^2}+y^2\right)^\alpha &\leq \left(1+\beta^2\cdot 1+y^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+|y|}{(1+|y|)^{2\cdot\frac{1}{2}}} \\ &= \left(\frac{1+\beta^2}{(1+|y|)^2}+\left(\frac{|y|}{1+|y|}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+|y|) \leq \left(1+\beta^2+1\right)^{\frac{1}{2}} \cdot (1+|y|).\end{aligned}$$

Somit gilt die Behauptung mit $C := \sqrt{2+\beta^2}$.
Fall 3: $\alpha > \frac{1}{2}$.
Dann haben wir

$$\frac{f(x,y)}{1+|y|} \geq \frac{\left(0+y^2\right)^\alpha}{1+|y|} = |y|^{2\alpha-1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{|y|}+1} \xrightarrow{2\alpha>1} +\infty, \quad \text{für} \quad y \to +\infty.$$

Insbesondere existiert keine Konstante $C < \infty$ mit $|f(x,y)| \leq C(1+|y|)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Damit ist die Behauptung beweisen und im Fall $\alpha \leq \frac{1}{2}$ liefert das hinreichende Kriterium aus der Vorlesung: $I = \mathbb{R}$. Für $\alpha > \frac{1}{2}$ liefert dieser Satz jedoch keine Aussage über das maximale Existenzintervall I der Lösung y.

Aufgabe 3 ($\mathbf{7+6+7=20}$ Punkte):
Betrachten Sie die Wärmeleitungsgleichungen mit Randwerten

$$(\star)\quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, & x_1, x_2 \in (0,\pi), t > 0, \\ u(x_1, 0, t) = u(x_1, \pi, t) = 0, & x_1 \in [0,\pi], t > 0, \\ u(0, x_2, t) = u(\pi, x_2, t) = 0, & x_2 \in [0,\pi], t > 0, \end{cases}$$

$$(\diamond)\quad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & x \in (0,\pi), t > 0, \\ w(0,t) = w(\pi, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

(i) Es seien $w, z\colon [0,\pi]\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ Lösungen von $(\diamond)$. Zeigen Sie, dass durch $u(x_1,x_2,t) = w(x_1,t)z(x_2,t)$ eine Lösung von $(\star)$ gegeben ist.

(ii) Geben Sie alle Lösungen w von $(\diamond)$ an, welche die Form $w(x,t) = a(x)b(t)$ besitzen.

(iii) Bestimmen Sie eine Lösung u von $(\star)$ mit $u(x_1,x_2,0) = \sin(2x_1)\sin(3x_2)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) Sei $u(x_1,x_2,t) \coloneqq w(x_1,t)z(x_2,t)$. Dann ist u zweimal stetig differenzierbar in x und einmal stetig differenzierbar in t als Komposition solcher Funktionen. Weiter gilt für $x_1 \in (0,\pi), x_2 \in (0,\pi), t > 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x_1,x_2,t) &= \frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t)z(x_2,t) + w(x_1,t)\frac{\partial z}{\partial t}(x_2,t), \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2,t) &= \frac{\partial w}{\partial x_1}(x_1,t)z(x_2,t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_1,x_2,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1,t)z(x_2,t), \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,x_2,t) &= w(x_1,t)\frac{\partial z}{\partial x_1}(x_2,t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}(x_1,x_2,t) = w(x_1,t)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}(x_2,t), \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x_1,x_2,t) - \Delta u(x_1,x_2,t) \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial t}(x_1,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}(x_1,t)\right) z(x_2,t) + w(x_1,t)\left(\frac{\partial z}{\partial t}(x_2,t) - \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}(x_2,t)\right) = 0. \end{aligned}$$

Für die Randwerte rechnen wir für $x_1 \in [0,\pi], x_2 \in [0,\pi], t > 0$:

$$\begin{aligned} u(x_1,0,t) &= w(x_1,t)z(0,t) = 0, & u(x_1,\pi,t) &= w(x_1,t)z(\pi,t) = 0, \\ u(0,x_2,t) &= w(0,t)z(x_2,t) = 0, & u(\pi,x_2,t) &= w(\pi,t)z(x_2,t) = 0. \end{aligned}$$

Also ist u eine Lösung von $(\star)$.

(ii) Einsetzen des Separationsansatzes $w(x,t) = a(x)b(t)$ in die Differentialgleichung in $(\diamond)$ liefert:

$$0 \overset{!}{=} \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = a(x)b'(t) - a''(x)b(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 = \frac{b'(t)}{b(t)} - \frac{a''(x)}{a(x)},$$

falls $a(x) \neq 0 \neq b(t)$. Da diese Gleichheit für alle $x, t \in \mathbb{R}$ gelten soll, muss es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ geben, sodass:

$$-a''(x) = \lambda a(x), \qquad b'(t) = -\lambda b(t).$$

Für die Randwerte erhalten wir:

$$0 \overset{!}{=} w(x,0) = a(0)b(t), \qquad 0 \overset{!}{=} w(x,\pi) = a(\pi)b(t).$$

Damit b nicht sofort konstant 0 ist (triviale Lösung), suchen wir a mit $a(0) = a(\pi) = 0$. Zusammen erhalten wir also

$$\boxdot \begin{cases} -a''(x) = \lambda a(x), & x \in \mathbb{R}, \\ a(0) = a(\pi) = 0, \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \odot \quad -b'(t) = -\lambda b(t), \quad t > 0$$

Wie in Aufgabe 21 auf Übungsblatt 11 sehen wir, dass $\lambda > 0$ gelten muss: Wir multiplizieren die Differentialgleichung in $\boxdot$ mit a, integrieren und nutzen die Randwerte:

$$\begin{aligned} \lambda \int_0^\pi a(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi -a''(x)a(x)\,\mathrm{d}x = -a'(\pi)a(\pi) + a'(0)f(0) + \int_0^\pi \big(a'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda = \frac{\int_0^\pi \big(a'(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x}{\int_0^\pi a(x)^2 \,\mathrm{d}x} > 0. \end{aligned}$$

Also hat a die Form

$$a(x) = A \cdot \sin\Big(\sqrt{\lambda}x\Big) + B \cdot \cos\Big(\sqrt{\lambda}x\Big).$$

Einsetzen der Randwerte liefert

$$\begin{aligned} 0 &\overset{!}{=} a(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1, \\ 0 &\overset{!}{=} a(\pi) = A \sin\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) + B \cos\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big), \end{aligned} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sin\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) & \cos\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) \end{pmatrix}$$

Damit a nicht konstant die Nullfunktion ist, muss die Determinante der Matrix 0 sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sin\Big(\sqrt{\lambda}\pi\Big) = 0$, d.h. wenn es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $\sqrt{\lambda} = k$. In diesem Fall liegt der Vektor $(1, 0)^T$ im Kern der Matrix, d.h. die Lösung a des Randwertproblems $\boxdot$ lautet $a(x) = A\sin(kx)$. Beachten Sie, dass $k = 0$ nicht erlaubt ist, da die Lösungsfunktion dann $a \equiv 0$ lautet würde und wir eine nichttriviale Lösung suchen. Die Lösung b der Differentialgleichung $\odot$ lautet: $b(t) = b(0)\exp\big(-k^2 t\big)$. Zusammen erhalten wir also für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung w des Randwertproblems $(\diamond)$ als:

$$w(x, t) = c\sin(kx)\exp\big(-k^2 t\big), \qquad (x, t) \in [0, \pi] \times [0, \infty).$$

(iii) Wir machen wie in Teil (i) einen Separationsansatz $u(x_1, x_2, t) = w(x_1, t)z(x_2, t)$. Separieren wir w und z nochmals wie in Teil (ii), so haben diese die Form $w(x_1, t) = c_1 \sin(k_1 x)\mathrm{e}^{-k_1^2 t}$, $z(x_2, t) = c_2 \sin(k_2 x)\mathrm{e}^{-k_2^2 t}$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Der Anfangswert $u(x_1, x_2, 0) = \sin(2x_1)\sin(3x_2)$ passt ebenfalls in diese Separation mit $w_0(x_1) := \sin(2x_1)$ und $z_0(x_2) := \sin(3x_2)$. Wir vergleichen die Ansätze mit den Anfangswerten, um die doch freien Parameter zu bestimmen:

$$\begin{aligned} c_1 \sin(k_1 x) \cdot 1 = w(x_1, 0) \overset{!}{=} w_0(x_1) = \sin(2x_1) \qquad &\Leftrightarrow \qquad c_1 = 1, \quad k_1 = 2, \\ c_2 \sin(k_2 x) \cdot 1 = z(x_2, 0) \overset{!}{=} z_0(x_2) = \sin(3x_2) \qquad &\Leftrightarrow \qquad c_2 = 1, \quad k_2 = 3. \end{aligned}$$

Wir erhalten: $u(x_1, x_2, t) = \sin(2x_1)\mathrm{e}^{-4t}\sin(3x_2)\mathrm{e}^{-9t} = \sin(2x_1)\sin(3x_2)\mathrm{e}^{-13t}$. Diese Funktion hat den korrekten Anfangswert und ist nach Teil (i) und (ii) eine Lösung von $(\star)$.

Aufgabe 4 ($5 + 7 + 8 = 20$ Punkte):
Lösen Sie die inhomogene Wellengleichung

$$(\star)\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x), & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cosh(x)\mathrm{e}^{\sinh(x)}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(i) Finden Sie <u>eine</u> Lösung $\tilde{u}$ der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} = \sin(x)$, die nur von x abhängt.

(ii) Definieren Sie $w \coloneqq u - \tilde{u}$. Bestimmen Sie dasjenige Anfangswertproblem, welches w löst.

(iii) Geben Sie mit Hilfe der Schritte (i) und (ii) die Lösung u des Problems $(\star)$ an. Rechnen Sie hierbei alle Integrale explizit aus.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Für die Funktion $\tilde{u}(x,t) = f(x)$ gilt $\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x,t) = -f''(x)$, also muss f die Gleichung $-f''(x) \overset{!}{=} \sin(x)$ erfüllen. Die allgemeine Lösung lautet $f(x) = a + bx + \sin(x)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Da wir nur an <u>einer</u> Lösung interessiert sind, setzen wir $a = b = 0$ und erhalten $\tilde{u}(x,t) = f(x) = \sin(x)$.

(ii) Sei $w \coloneqq u - \tilde{u}$ mit $\tilde{u}(x,t) = \sin(x)$. Dann gilt für $x, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\right) - \left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2}(x,t)\right) \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - \sin(x). \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \sin(x).$$

Für die Anfangswerte finden wir für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} w(x,0) &= u(x,0) - \tilde{u}(x,0) = u(x,0) - \sin(x), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) - 0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also für die Systeme:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin(x), & x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \cosh(x)\mathrm{e}^{\sinh(x)}, & x \in \mathbb{R} \end{cases} \\ \Longleftrightarrow \quad &\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, & x, t \in \mathbb{R}, \\ w(x,0) = -\sin(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = \cosh(x)\mathrm{e}^{\sinh(x)}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{aligned}$$

(iii) Das letzte System ist eine homogene Wellengleichung, für die wir die Lösungsformel aus der Vorlesung anwenden können. Die Lösung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \frac{1}{2}(-\sin(x+t) - \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cosh(z)\mathrm{e}^{\sinh(z)}\mathrm{d}z \\ &= \frac{1}{2}\left(-\sin(x+t) - \sin(x-t) + \mathrm{e}^{\sinh(x+t)} - \mathrm{e}^{\sinh(x-t)}\right) \end{aligned}$$

für $x, t \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir für die Lösung u von $(\star)$:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= w(x,t) + \tilde{u}(x,t) \\ &= \frac{1}{2}\left(2\sin(x) - \sin(x+t) - \sin(x-t) + \mathrm{e}^{\sinh(x+t)} - \mathrm{e}^{\sinh(x-t)}\right). \end{aligned}$$