Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann

WS 2021/2022
22.03.2022

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Modulprüfung

Aufgabe 1 (10+10=20 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) - xy(x) + 3xy(x)^2 = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y(0) = \frac{1}{4}\,.$$

Hinweis: Trennung der Variablen empfiehlt sich nicht.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2y''(x) - xy'(x) + 5y(x) = 0\,, \quad x > 0\,.$$

Aufgabe 2 (14+6=20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\left(4x + 4 + 2xe^{y-x}\right)\,dx + \left(-4x + 5e^{y-x}\right)\,dy = 0\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

nicht exakt in $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor μ, der nur von $x - y$ abhängt (d. h. der Form $\mu(x,y) = \rho(x-y)$ für eine geeignete Funktion ρ) und berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (-1 + 5x)e^{3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 3 (9+6+5=20 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und deren algebraische und geometrische Vielfachheiten und geben Sie die zugehörigen Eigenvektoren an.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 4 (12+8=20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Lösung von

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u(x,y)\,, \quad (x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}\,,$$
$$u(1,y) = y\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens. Bestätigen Sie durch eine Probe, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 3u(x,t)\,, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2\,,$$
$$u(x,0) = \cos(2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes der Form $u(x,t) = w(x)v(t)$.

Viel Erfolg!