Institut für Analysis
apl. Prof. Dr. Peer Christian Kunstmann

WS 2021/2022
22.03.2022

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Lösungsvorschläge zur Modulprüfung

Aufgabe 1 (10+10=20 Punkte)

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) - xy(x) + 3xy(x)^2 = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad y(0) = \frac{1}{4}\,.$$

Hinweis: Trennung der Variablen empfiehlt sich nicht.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 y''(x) - xy'(x) + 5y(x) = 0\,, \quad x > 0\,.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1

(a) Es handelt sich um eine Bernoullische Differentialgleichung mit $\alpha = 2$. Da der Anfangswert positiv ist, suchen wir zunächst eine Lösung $y : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$ und $y(x) > 0$ für alle $x \in I$ ist. Wir multiplizieren die Gleichung mit $-y(x)^{-2}$ und setzen $z(x) = y(x)^{-1}$, was auf die Differentialgleichung

$$z'(x) + xz(x) - 3x = 0\,, \quad x \in I\,,$$

mit Anfangswert $z(0) = 4$ führt. Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$z_h(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}\,, \quad x \in I\,,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu bestimmen verwenden wir Variation der Konstanten und machen den Ansatz $z_p(x) = c(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$, was zu

$$c'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = 3x\,, \quad x \in I\,,$$

führt. Wir berechnen

$$c(x) = \int 3xe^{\frac{x^2}{2}}\,dx = 3\int e^u\,du = 3e^u = 3e^{\frac{x^2}{2}}\,,$$

wobei wir die Substition $\frac{x^2}{2} = u$ verwendet und die Integrationskonstante zu Null gewählt haben. Also erhalten wir eine spezielle Lösung durch

$$z_p(x) = 3\,, \quad x \in I\,.$$

Die allgemeine Lösung für z lautet also

$$z(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}} + 3\,, \quad x \in I\,,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, für die wir aus der Anfangsbedingung den Wert $c = 1$ berechnen. Wir erhalten also die Lösung

$$y(x) = z(x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3 + e^{-\frac{x^2}{2}}}\,, \quad x \in I\,,$$

und sehen, dass dieser Ausdruck positiv ist für alle $x \in \mathbb{R}$, weswegen wir $I = \mathbb{R}$ setzen können.

Alternative Lösung: Trennung der Veränderlichen führt auf

$$\int_{\frac{1}{4}}^{y(x)} \frac{d\eta}{3\eta^2 - \eta} = \int_0^x \frac{y'(t)}{3y'(t)^2 - y(t)}\, dt = -\int_0^x t\, dt = -\frac{x^2}{2}\,.$$

Um das linke Integral zu berechnen führen wir eine Partialbruchzerlegung durch, was auf

$$\frac{1}{3\eta(\eta - \frac{1}{3})} = -\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta - \frac{1}{3}}$$

führt. Aufgrund der Anfangsbedingung suchen wir zunächst nach einer Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ mit $y(x) \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ für alle $x \in I$, wobei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $0 \in I$ ist. Wir erhalten

$$-\frac{x^2}{2} = \int_{\frac{1}{4}}^{y(x)} \frac{d\eta}{3\eta^2 - \eta} = \left[-\ln(|\eta|) + \ln\left(\left|\eta - \frac{1}{3}\right|\right)\right]_{\frac{1}{4}}^{y(x)} = \ln\left(3\frac{\frac{1}{3} - y(x)}{y(x)}\right)\,.$$

Auflösen nach $y(x)$ liefert

$$y(x) = \frac{1}{3 + e^{-\frac{x^2}{2}}}\,, \quad x \in I\,,$$

und wir sehen, dass dies eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ ist, d. h. $I = \mathbb{R}$.

(b) Es handelt sich um eine Eulersche Differentialgleichung. Wir verwenden die Substitution $x = e^t, u(t) = y(e^t)$ und berechnen

$$\begin{aligned} u'(t) &= y'(e^t)e^t = xy'(x)\,, \\ u''(t) &= y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t = x^2y''(x) + xy'(x)\,, \end{aligned}$$

was auf die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$u''(t) - 2u'(t) + 5u(t) = 0\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

führt. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5\,,$$

welches die beiden Nullstellen $1 \pm 2i$ besitzt. Die allgemeine Lösung für u lautet demnach

$$u(t) = c_1e^t\cos(2t) + c_2e^t\sin(2t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Rücksubstitution liefert

$$y(x) = u(\ln(x)) = c_1x\cos(2\ln(x)) + c_2x\sin(2\ln(x))\,, \quad x > 0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Aufgabe 2 (14+6=20 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$\left(4x + 4 + 2xe^{y-x}\right)\, dx + \left(-4x + 5e^{y-x}\right)\, dy = 0\,, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

nicht exakt in $\mathbb{R}^2$ ist. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor μ, der nur von $x - y$ abhängt (d. h. der Form $\mu(x, y) = \rho(x - y)$ für eine geeignete Funktion ρ) und berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in impliziter Form.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = (-1 + 5x)e^{3x}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2

(a) Wir definieren die Funktionen $P, Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$\begin{aligned} P(x,y) &= 4x + 4 + 2xe^{y-x}\,, \\ Q(x,y) &= -4x + 5e^{y-x}\,. \end{aligned}$$

Diese sind stetig differenzierbar auf der offenen und einfach zusammenhängenden Menge $\mathbb{R}^2$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \partial_y P(x,y) &= 2xe^{y-x}\,, \\ \partial_x Q(x,y) &= -4 - 5e^{y-x} \end{aligned}$$

für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Da $\partial_y P$ und $\partial_x Q$ auf $\mathbb{R}^2$ nicht übereinstimmen, ist die Differentialgleichung nicht exakt in $\mathbb{R}^2$. Wir machen den Ansatz

$$\begin{aligned} \tilde{P}(x,y) &= \mu(x,y)P(x,y)\,, \\ \tilde{Q}(x,y) &= \mu(x,y)Q(x,y)\,, \end{aligned}$$

für einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x,y) = \rho(x-y)$ und berechnen

$$\begin{aligned} \partial_y \tilde{P}(x,y) &= -\rho'(x-y)\left(4x + 4 + 2xe^{y-x}\right) + \rho(x-y)2xe^{y-x}\,, \\ \partial_x \tilde{Q}(x,y) &= \rho'(x-y)\left(-4x + 5e^{y-x}\right) + \rho(x-y)\left(-4 - 5e^{y-x}\right)\,. \end{aligned}$$

Gleichsetzen liefert

$$\rho'(x-y)\big(5e^{y-x} + 4 + 2xe^{y-x}\big) \stackrel{!}{=} \rho(x-y)\big(5e^{y-x} + 4 + 2xe^{y-x}\big)\,,$$

was auf die Differentialgleichung

$$\rho'(t) = \rho(t)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

führt mit $t = x - y$. Eine Lösung lautet $\rho(x-y) = e^{x-y}$ (eine multiplikative Konstante spielt keine Rolle). Wir sehen, dass μ stets positiv ist und somit ist die Differentialgleichung

$$\big((4x+4)e^{x-y} + 2x\big)\,dx + \left(-4xe^{x-y} + 5\right)\,dy = 0\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

äquivalent zur gegebenen Differentialgleichung und exakt in $\mathbb{R}^2$. Um ein Potential F zu bestimmen, gehen wir von $\partial_x F = \tilde{P}$ aus und integrieren bzgl. x. Dies liefert mit partieller Integration

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int \tilde{P}(x,y)\,dx = 4e^{-y}\int (x+1)e^x\,dx + \int 2x\,dx \\ &= 4xe^{x-y} + x^2 + \phi(y) \end{aligned}$$

mit einer Funktion ϕ, für die wir aus der Bedingung $\partial_y F = \tilde{Q}$ die Gleichung $\phi'(y) = 5, y \in \mathbb{R}$, erhalten. Also ist

$$F(x,y) = 4xe^{x-y} + x^2 + 5y\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

ein Potential und die allgemeine Lösung ist implizit gegeben durch

$$4xe^{x-y} + x^2 + 5y = c\,, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,$$

mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

(b) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 .$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung lautet also

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

mit Konstanten $c_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Um eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung zu finden, machen wir den Ansatz

$$y_p(x) = (a + bx)e^{3x} , \quad x \in \mathbb{R}, \text{ mit } a, b \in \mathbb{R} .$$

Wir berechnen die Ableitungen zu

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (3a + 3bx + b)e^{3x} , \\ y_p''(x) &= (9a + 9bx + 6b)e^{3x} \end{aligned}$$

und Einsetzen führt auf

$$(a + 2b + bx)e^{3x} \overset{!}{=} (-1 + 5x)e^{3x} , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

woraus wir durch einen Koeffizientenvergleich $b = 5$ und $a = -11$ erhalten. Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + (-11 + 5x)e^{3x} , \quad x \in \mathbb{R} ,$$

mit Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (9+6+5=20 Punkte)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und deren algebraische und geometrische Vielfachheiten und geben Sie die zugehörigen Eigenvektoren an.

(b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für die Differentialgleichung

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) , \quad t \in \mathbb{R} .$$

(c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t) , \quad t \in \mathbb{R} , \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3

(a) Wir berechnen das charakteristische Polynom zu

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda + 3) \det \begin{pmatrix} -1 - \lambda & 4 \\ -1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = -(\lambda + 3)(\lambda - 1)^2 .$$

Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = -3$ und $\lambda_2 = 1$ mit algebraischen Vielfachheiten 1 bzw. 2. Die Eigenräume ergeben sich zu

$$\operatorname{Kern}(A+3I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

$$\operatorname{Kern}(A-I) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Beide Eigenwerte besitzen die geometrische Vielfachheit 1.

(b) Mit den Eigenvektoren aus Teil a) erhalten wir die Lösungen

$$\vec{\phi}_1(t) = e^{-3t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\phi}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

für $t \in \mathbb{R}$. Um eine dritte linear unabhängige Lösung zu erhalten, ergänzen wir die gewählte Basis von $\operatorname{Kern}(A-I)$ zu einer Basis des Hauptraums zum Eigenwert 1. Es gilt

$$\operatorname{Kern}(A-I)^2 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

Dabei wurde der neue Basisvektor zweckmäßigerweise so gewählt, dass

$$(A-I)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der neue Basisvektor führt zu

$$\vec{\phi}_3(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t(A-I)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit bilden $\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3$ ein Fundamentalsystem für $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)$.

(c) Die allgemeine Lösung der Gleichung $\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t)$ lautet

$$\vec{y}(t) = c_1\vec{\phi}_1(t) + c_2\vec{\phi}_2(t) + c_3\vec{\phi}_3(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit Konstanten $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$, welche wir mit Hilfe des Anfangswerts bestimmen. Aus

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 2c_2 - c_3 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

ergibt sich $c_2 = -5, c_1 = 1, c_3 = -10$. Also ist die Lösung des Anfangswertproblems gegeben durch

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} -20te^{t} \\ e^{-3t} \\ -(5+10t)e^{t} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 4 (12+8=20 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Lösung von

$$x\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = u(x,y)\,, \quad (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}\,,$$
$$u(1,y) = y\,, \quad y \in \mathbb{R}\,,$$

mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens. Bestätigen Sie durch eine Probe, dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 3u(x,t)\,, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2\,,$$
$$u(x,0) = \cos(2x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mit Hilfe eines Separationsansatzes der Form $u(x,t) = w(x)v(t)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4

(a) Wir definieren die Funktionen $\vec{a} : (0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $b : (0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$\vec{a}(x,y,u) = \begin{pmatrix} x \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b(x,y,u) = u\,.$$

Die vorliegende quasilineare Differentialgleichung erster Ordnung nimmt dann die Form

$$\vec{a}(x,y,u)\cdot\nabla_{(x,y)}u(x,y) = b(x,y,u)\,, \quad (x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}\,,$$

an. Die Anfangswerte sind auf der Geraden $\Gamma := \big\{(1,\xi) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \xi \in \mathbb{R}\big\}$ durch $f(\xi) = \xi$ vorgegeben. Das charakteristische System lautet

$$\vec{k}\,'(s) = \vec{a}\left(\vec{k}(s), w(s)\right) = \begin{pmatrix} k_1(s) \\ -1 \end{pmatrix}\,,$$
$$w'(s) = b\left(\vec{k}(s), w(s)\right) = w(s)$$

mit Anfangswerten

$$\vec{k}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \xi \end{pmatrix}\,,$$
$$w(0) = f(\xi) = \xi$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$, wobei s aus einem geeigneten Intervall I ist. Die Lösung dieses Systems ist gegeben durch

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} e^s \\ \xi - s \end{pmatrix}\,,$$
$$w(s,\xi) = \xi e^s\,.$$

Für jedes gegebenes $(x,y) \in (0,\infty)\times\mathbb{R}$ ist die Gleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{k}(s,\xi)$$

eindeutig nach s, ξ auflösbar mit Lösung $s = \ln(x), \xi = y + \ln(x)$. Wir wählen also $I = \mathbb{R}$. Wir setzen ein und erhalten die Funktion

$$u(x, y) = w(s, \xi) = (y + \ln(x))x\,, \quad (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}\,,$$

als Kandidaten für eine Lösung des Problems. Dass es sich tatsächlich um eine Lösung handelt, sehen wir durch die Probe

$$\begin{aligned} x\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= x(1 + y + \ln(x)) - x = x(y + \ln(x)) = u(x, y)\,,\ (x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}\,, \\ u(1, y) &= 1(y + \ln(1)) = y\,, \quad y \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

(b) Wir setzen den Ansatz ein und erhalten (für $v(t)w(x) \neq 0$)

$$\frac{v'(t)}{v(t)} - 3 = \frac{w''(x)}{w(x)}\,.$$

Die linke Seite hängt nur von t und die rechte nur von x ab. daher müssen beide gleich einer Konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ sein. Also erhalten wir die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} v'(t) &= (\lambda + 3)v(t)\,, \\ w''(x) &= \lambda w(x)\,, \end{aligned}$$

welche die Lösungen

$$\begin{aligned} v(t) &= ce^{(\lambda+3)t}\,, \\ w(x) &= \begin{cases} a\sinh\left(\sqrt{\lambda}x\right) + b\cosh\left(\sqrt{\lambda}x\right)\,, & \lambda > 0\,, \\ a + bx\,, & \lambda = 0\,, \\ a\sin\left(\sqrt{-\lambda}x\right) + b\cos\left(\sqrt{-\lambda}x\right)\,, & \lambda < 0\,, \end{cases} \end{aligned}$$

für $x, t \in \mathbb{R}$ mit Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ besitzen. Aufgrund der Anfangsbedingung $u(x, 0) = v(0)w(x) \overset{!}{=} \cos(2x), x \in \mathbb{R}$ muss $\lambda = -4, a = 0, bc = 1$ gelten und wir erhalten

$$u(x, t) = \cos(2x)e^{-t}\,, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2\,.$$