Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
Modulprüfung

Aufgabe 1 ($10 + 10 = 20$ Punkte)**.**

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' + y(1-y)\sin x &= 0, \\ y(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Bernoulli-Differentialgleichung.

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

für $x > 0$.
Hinweis: Die Funktion $(0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x$ *löst die obige Differentialgleichung.*

Aufgabe 2 ($(2 + 4 + 4) + 10 = 20$ Punkte)**.**

(a) Gegeben sei

$$\begin{aligned} \left(x^2y^2 + 2xy^2\right)\mathrm{d}x + 2x^2y\,\mathrm{d}y &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

für $x \geq 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

(ii) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x, y) = \mu(x)$.

(iii) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} - y'' - 6y' = -6x(3x + 1)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (5 + 15 = 20 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass für $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos y(x) \arctan x \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

auf einem Intervall der Form $[0, t_0)$ existiert.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = Ay(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ sowie die spezielle Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = y_0$, wobei die Matrix A und der Anfangswert y_0 gegeben seien durch

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 (10 + 10 = 20 Punkte).

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_x(x,t) &= \arccos(x+t) \\ u(x,0) &= x^2 - 3 \end{aligned}$$

für alle $x, t \in \mathbb{R}$ mit $|x+t| \leq 1$.

(b) Finden Sie mithilfe eines Separationsansatzes eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - 2u_x(x,t) &= 0, \\ u(0,t) &= \cosh t \end{aligned}$$

für $x, t \in \mathbb{R}$.