WS 2022/2023
20. März 2023
Institut für Analysis
Dr. Christoph Schmoeger

# Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik
## Lösungsvorschlag zur Modulprüfung

**Aufgabe 1** ($10 + 10 = 20$ Punkte).

(a) Bestimmen Sie eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} y' + y(1-y)\sin x &= 0, \\ y(0) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}$.
*Hinweis: Bernoulli-Differentialgleichung.*

(b) Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

für $x > 0$.
*Hinweis: Die Funktion* $(0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^x$ *löst die obige Differentialgleichung.*

*Lösungsvorschlag.*

(a) Durch Umformungen erhalten wir die Gleichung

$$y' + \sin xy - \sin xy^2 = 0,$$

also ist die Gleichung eine Bernoullische Differentialgleichung mit $g(x) = \sin x, h(x) = -\sin x$ und $\alpha = 2$, wobei wir die Notation aus der Vorlesung verwenden. Nach der Vorlesung erfüllt die substituierte Variable $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$ die lineare inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

$$z' = z\sin x - \sin x.$$

Die Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist

$$z_h(x) = c\mathrm{e}^{-\cos x}$$

für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Da $C(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$ eine Stammfunktion von $-\sin x\mathrm{e}^{\cos x}$ ist, ist

$$z_p(x) = \mathrm{e}^{\cos x}\mathrm{e}^{-\cos x} = 1$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung (Variation der Konstanten). Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung die Summe von $z_h$ und $z_p$, also

$$z(x) = c\mathrm{e}^{-\cos x} + 1.$$

Also ist die allgemeine Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$y(x) = z(x)^{-1} = \frac{1}{(c\mathrm{e}^{-\cos x} + 1)}$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Einsetzen der Anfangsbedingung ergibt $c = \mathrm{e}$, also ist die Lösung des Anfangswertproblems für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch

$$y(x) = \frac{1}{(\mathrm{e}^{1-\cos x} + 1)}.$$

(b) Nach Dividieren durch $x$ erhalten wir die Gleichung

$$y'' - 2\frac{x+1}{x}y' + \frac{x+2}{x}y = 0.$$

Wir nutzen das Verfahren von d'Alembert und suchen Lösungen der Form $y(x) = v(x)y_1(x)$ für Funktionen $v$, wobei $u = v'$ die Differentialgleichung

$$u' + \left(\frac{2\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} - 2\frac{x+1}{x}\right)u = u' + \frac{2}{x}u = 0$$

erfüllt. Somit gilt $u(x) = c1/x^2$ für eine zu wählende Konstante $c \in \mathbb{R}$, also $y(x) = (cx^3 + d)\mathrm{e}^x$ mit einer weiteren Konstanten $d \in \mathbb{R}$. Die Anfangsbedingung liefert $d = 1/\mathrm{e} - c$ und $c \in \mathbb{R}$ ist beliebig. $\square$

**Aufgabe 2** ($(2 + 4 + 4) + 10 = 20$ Punkte)**.**

(a) Gegeben sei

$$\begin{aligned} \left(x^2y^2 + 2xy^2\right)\mathrm{d}x + 2x^2y\,\mathrm{d}y &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

für $x \geq 1$.

(i) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

(ii) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor der Form $\mu(x, y) = \mu(x)$.

(iii) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y^{(3)} - y'' - 6y' = -6x(3x + 1)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

*Lösungsvorschlag.*

(a) Wir setzen

$$P(x, y) = \left(2x^2y^2 + 2xy^2\right)$$

und

$$Q(x, y) = 2x^2y.$$

(i) Nach einem Satz aus der Vorlesung ist die Gleichung genau dann exakt, wenn $\partial_y P = \partial_x Q$. Da

$$\begin{aligned} \partial_y P(x, y) &= 2x^2y + 4xy \\ &\neq 4xy \\ &= \partial_x Q(x, y) \end{aligned}$$

ist die Differentialgleichung nicht exakt.

(ii) Wir suchen so ein $\mu$ mit $\mu(x, y) = \mu(x)$, dass

$$\mu(x, y)P(x, y)\,\mathrm{d}x = \mu(x, y)Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

exakt ist. Daher benötigen wir

$$\begin{aligned} & \partial_y(\mu(x)P(x, y)) = \partial_x(\mu(x)Q(x, y)) \\ \iff\ & \mu(x)\left(2x^2y + 4xy\right) = \mu'(x)2x^2y + \mu(x)4xy \\ \iff\ & \mu'(x) = \mu(x), \end{aligned}$$

also ist $\mu(x) = \mathrm{e}^x$ der gesuchte integrierende Faktor.

(iii) Es seien $\tilde{P} = \mu P$ und $\tilde{Q} = \mu Q$, also

$$\tilde{P}(x, y) = \mathrm{e}^x\left(2x^2y^2 + 2xy^2\right)$$

und

$$\tilde{Q}(x, y) = \mathrm{e}^x 2x^2y$$

Wir suchen so ein $F \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, dass $\partial_x F = \tilde{P}$ und $\partial_y F = \tilde{Q}$. Durch scharfes Hinsehen (oder Berechnen von Stammfunktionen) sehen wir, dass

$$F(x, y) = \mathrm{e}^x x^2 y^2.$$

Somit sind sämtliche Lösungen $y$ der Differentialgleichung in impliziter Form darstellbar durch

$$\mathrm{e}^x x^2 y(x)^2 = C$$

für $C \in \mathbb{R}$, also gilt

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{c}{x^2 e^x}}.$$

Aus $y(1) = 1$ folgt, dass die positive Lösung mit $C = \mathrm{e}$ das Anfangswertproblem löst.

(b) Das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung lautet

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = \lambda(\lambda - 3)(\lambda + 2).$$

Damit ist für $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

$$y_h(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{3x} + c_3 \mathrm{e}^{-2x}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung. Da die Inhomogenität von der Form $-6x(3x+1)\mathrm{e}^{0x}\sin(0x)$ ist und $0 + \mathrm{i}0$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, wählen wir für eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung den Ansatz

$$y_p(x) = x(q(x) \cdot 1 \cdot 0 + r(x) \cdot 1 \cdot 1) = xr(x)$$

für zwei Polynome $q$ und $r$ von Grad 2. Für $r(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt also

$$\begin{aligned} y_p(x) &= ax^3 + bx^2 + cx, \\ y_p'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c, \\ y_p''(x) &= 6ax + 2b \text{ und} \\ y_p^3(x) &= 6a. \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} & 6a - 6ax - 2b - 18ax^2 - 12bx - 6c = -6x(3x+1) \\ \iff\ & -18ax^2 + (-6a - 12b)x + 2(3a - b - 3c) = -18x^2 - 6x. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt

$$\begin{aligned} -18a = -18 &\iff a = 1, \\ -6a - 12b = -6 &\iff b = 0 \text{ und} \\ 3a - b - 3c = 0 &\iff c = 1. \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y_p(x) = x\big(x^2 + 1\big).$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist also

$$y(x) = c_1 + c_2 \mathrm{e}^{3x} + c_3 \mathrm{e}^{-2x} + x\big(x^2 + 1\big). \qquad \square$$

**Aufgabe 3** (5 + 15 = 20 Punkte).

(a) Zeigen Sie, dass für $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung von

$$\begin{aligned} y'(x) &= \cos y(x) \arctan x \\ y(0) &= y_0 \end{aligned}$$

auf einem Intervall der Form $[0, t_0)$ existiert.

(b) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) = Ay(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ sowie die spezielle Lösung zu dem Anfangswert $y(0) = y_0$, wobei die Matrix $A$ und der Anfangswert $y_0$ gegeben seien durch

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

*Lösungsvorschlag.*

(a) Zunächst setzen wir $f(x, y) := \cos y(x) \arctan x$. Dann ist $f$ stetig partiell differentierbar. Nach dem Satz von Picard–Lindelöf ist die Gleichung damit für jeden Anfangswert lokal eindeutig lösbar.

(b) Wir berechnen zunächst das charakteristische Polynom der Matrix $A$:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 0 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} &= (4-\lambda) \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= (4-\lambda)(1-\lambda)^2 - 2 \cdot 2 \\ &= -\lambda(\lambda-3)^2. \end{aligned}$$

Somit hat die Matrix den einfachen Eigenwert 0 und den doppelten Eigenwert 3. Zum Berechnen von Basen der Eigen- und Haupträume sehen wir

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \\ \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= \operatorname{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

und

$$\operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}^2 = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & 4 & -4\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix} = \operatorname{lin}\left\{\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Somit erhalten wir die linear unabhängigen Lösungen

$$\varphi_1(t) = \mathrm{e}^{0t}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}$$

$$\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{3t}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned}\varphi_3(t) &= \mathrm{e}^{3t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)\\ &= \mathrm{e}^{3t}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\-2\\-1\end{pmatrix},\right)\end{aligned}$$

also

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}1 & 2\mathrm{e}^{3t} & -2t\mathrm{e}^{3t}\\ -2 & 2\mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t} - 2t\mathrm{e}^{3t}\\ 2 & \mathrm{e}^{3t} & \mathrm{e}^{3t} - t\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung lautet $\Phi(t)c$, wobei $c \in \mathbb{R}^3$. Die spezielle Lösung zum gegebenen Anfangswert ergibt sich durch Bestimmung des Vektors $c$ mithilfe der Gleichung $\Phi(0)c = y_0$, also in unserem Fall $c = (1, 1, -1)$. Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = \begin{pmatrix}1 + 2\mathrm{e}^{3t} + 2t\mathrm{e}^{3t}\\ -2 + \mathrm{e}^{3t} + 2t\mathrm{e}^{3t}\\ 2 + t\mathrm{e}^{3t}\end{pmatrix}. \qquad \square$$

**Aufgabe 4** (10 + 10 = 20 Punkte).

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_t(x,t) - u_x(x,t) &= \arccos(x+t)\\ u(x,0) &= x^2 - 3\end{aligned}$$

für alle $x, t \in \mathbb{R}$ mit $|x + t| \le 1$.

(b) Finden Sie mithilfe eines Separationsansatzes eine Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - 2u_x(x,t) &= 0, \\ u(0,t) &= \cosh t \end{aligned}$$

für $x, t \in \mathbb{R}$.

*Lösungsvorschlag.*

(a) Die gegebene Differentialgleichung ist eine lineare Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir setzen also

$$\begin{aligned} f(x) &\coloneqq x^2 - 3 \\ g(x,t) &= \arccos(x+t) \\ a &= -1. \end{aligned}$$

Dann ist die Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(x - ta) + \int_0^t g(x - (t-r)a, r)\,\mathrm{d}r \\ &= (x+t)^2 - 3 + \int_0^t \arccos(x + (t-r) + r)\,\mathrm{d}r \\ &= (x+t)^2 - 3 + t\arccos(x+t). \end{aligned}$$

(b) Wir schreiben $u(x,t) = v(x)w(t)$ für zu bestimmende Funktionen $v$ und $w$. Die Anfangsbedingung lautet dann $u(0,t) = v(0)w(t) = \cosh t$, also $w(t) = v(0)^{-1}\cosh t$. Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - 2u_x(x,t) &= v(x)w''(t) - 2v'(x)w(t) \\ &= v(x)\frac{1}{v(0)}\cosh t - 2v'(x)\frac{1}{v(0)\cosh t} \\ &= (v(x) - 2v'(x))\frac{1}{v(0)\cosh t} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also erfüllt $v$ die Differentialgleichung $v(x) = 2v'(x)$, also $v(x) = c\mathrm{e}^{x/2}$ für ein $c \in \mathbb{R}$. Es folgt $v(0) = c$ und somit

$$u(x,t) = \mathrm{e}^{x/2}\cosh t. \qquad \square$$