Institut für Analysis
JProf. Dr. Xian Liao
M.Sc. Rebekka Zimmermann

Klausuraufgaben

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2023/2024

Aufgabe 1 (10+10=20 Punkte)**:**

(i) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $u(x)$ der folgenden inhomogenen Differentialgleichung

$$u' - \frac{1}{x}u = 3x, \quad x \in (0, \infty).$$

(ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $y(x)$ der folgenden inhomogenen Differentialgleichung

$$y'' - (\frac{1}{x} + 2)y' + (\frac{1}{x} + 1)y = 3x\mathrm{e}^x, \quad x \in (0, \infty)$$

mit dem Verfahren von d'Alembert.
Hinweis 1: Die Funktion $y_1(x) = \mathrm{e}^x$, $x \in (0, \infty)$, löst die zugehörige homogene Gleichung.
Hinweis 2: Sie dürfen Ihr Ergebnis aus Teilaufgabe (i) verwenden.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

(i) Die allgemeine Lösung u_h der zugehörigen homogenen Gleichung ist gegeben durch $u_h(x) = Cx$, $x \in (0, \infty)$, mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$. Für eine spezielle Lösung verwenden wir der Variation-der-Konstanten Ansatz $u_p(x) = C(x)x$. Einsetzen in die inhomogene u-Gleichung ergibt

$$C'(x)x \stackrel{!}{=} 3x \quad \Longleftrightarrow \quad C'(x) = 3 \quad \Leftarrow \quad C(x) = 3x,$$

und damit $u_p(x) = 3x^2$. Die allgemeine Lösung der u-Gleichung ist daher

$$u(x) = Cx + 3x^2, \quad x \in (0, \infty).$$

(ii) Wir verwenden das Verfahren von d'Alembert: Der Ansatz $y = vy_1$ mit einer zu bestimmenden Funktion v führt auf

$$v'' - \frac{1}{x}v' = 3x.$$

Nach Teilaufgabe (i) gilt

$$v'(x) = Cx + 3x^2, \quad x \in (0, \infty).$$

Aufintegrieren liefert

$$v(x) = C_1 x + x^3 + C_2, \quad x \in (0, \infty),$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. Insgesamt erhalten wir die allgemeine Lösung der y-Gleichung

$$y(x) = y_1(x)v(x) = \mathrm{e}^x(C_1 x + x^3 + C_2), \quad x \in (0, \infty),$$

mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 ((2+4+4)+10=20 Punkte)**:**

(i) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$(1 + 2x^2)y\,dx + x\,dy = 0,$$
$$y(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung nicht exakt ist.

(b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor μ der Form $\mu(x,y) = \rho(x)$ mit einer geeigneten Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Geben Sie die Lösung $y(x)$ des Anfangswertproblems in expliziter Form an.

(ii) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} y'' - x^2 y' - 2xy &= 0, \\ y(0) &= 1, \\ y'(0) &= 0, \end{aligned}$$

mit einem Potenzreihenansatz $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, mit Koeffizienten $(c_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{R}$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

(i) Seien $P(x,y) = (1+2x^2)y$, $Q(x,y) = x$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Dann sind P, Q stetig differenziertbar auf $\mathbb{R}^2$ mit

$$\partial_y P(x,y) = 1 + 2x^2, \quad \partial_x Q(x,y) = 1.$$

Da diese auf keinem Gebiet in $\mathbb{R}^2$ übereinstimmen, ist die Differentialgleichung nicht exakt. Wir suchen daher eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} \partial_y(\rho(x)P(x,y)) &= \partial_x(\rho(x)Q(x,y)), \\ \iff \quad (1+2x^2)\rho(x) &= x\rho'(x) + \rho(x), \\ \iff \quad \rho'(x) &= 2x\rho(x), \\ \Leftarrow \quad \rho(x) &= \mathrm{e}^{x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die äquivalente Differentialgleichung

$$(1+2x^2)y\mathrm{e}^{x^2}\,dx + x\mathrm{e}^{x^2}\,dy = 0$$

ist also exakt auf $\mathbb{R}^2$. Eine mögliche Stammfunktion ist

$$F(x,y) = xy\mathrm{e}^{x^2}, \quad \text{d.h.} \quad \nabla_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} (1+2x^2)y\mathrm{e}^{x^2} \\ x\mathrm{e}^{x^2} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung zum Anfangswert $y(1) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ erfüllt die Gleichung

$$\begin{aligned} F(x,y(x)) &= F(1,y(1)) \\ \iff \quad xy(x)\mathrm{e}^{x^2} &= 1, \\ \iff \quad y(x) &= \frac{\mathrm{e}^{-x^2}}{x}, \quad x \in (0,\infty). \end{aligned}$$

(ii) Der Potenzreihenansatz führt zu

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y(0) = c_0, \\ y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad y'(0) = c_1, \\ y''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2}x^n. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
0 &= y'' - x^2y' - 2xy \\
&= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} 2c_n x^{n+1} \\
&= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)c_{n-1}x^n \\
&= 2c_2 + \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)((n+2)c_{n+2} - c_{n-1})x^n.
\end{aligned}$$

Wir erhalten die Bedingungen

$$\begin{aligned}
c_2 &= 0, \\
c_{n+2} &= \frac{c_{n-1}}{n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $c_0 = 1$ und $c_1 = 0$ berechnen wir

$$c_3 = \frac{1}{3},\ c_4 = c_5 = 0,\ c_6 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6},\ c_7 = c_8 = 0,\ c_9 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{9},\ c_{10} = c_{11} = 0,\ ...$$

Dies führt auf

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{3^k k!}, & n = 3k, \quad k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Insgesamt erhalten wir die Lösung

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{3k}}{3^k k!}.$$

Bemerkung: Die Lösung kann umgeformt werden zu

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^3}{3}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (10+10=20 Punkte)**:**

(i) Seien $a > 0$ und $b : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter seien $\varphi_1, \varphi_2 : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, welche die Ungleichungen

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) \leq a\varphi_1(t) + b(t), & t \in (0,\infty), \\ \varphi_2'(t) \geq a\varphi_2(t) + b(t), & t \in (0,\infty), \\ \varphi_1(0) \leq \varphi_2(0), \end{cases}$$

erfüllen. Zeigen Sie, dass $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$ gilt.
Hinweis: Wenden Sie das Lemma von Gronwall auf die Differenz $\varphi(t) := \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ an.

(ii) Gegeben sei das lineare Differentialgleichungssystem mit konstanten Koeffizienten

$$\vec{y}\,'(t) = A\vec{y}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $\vec{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des obigen Differentialgleichungssystems.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(i) Wir definieren $\varphi(t) := \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, $t \in [0,\infty)$. Dann gilt

$$\varphi'(t) = \varphi_1'(t) - \varphi_2'(t) \leq a\varphi_1(t) + b(t) - (a\varphi_2(t) + b(t)) = a\varphi(t), \quad t \in [0,\infty).$$

Aufintegrieren liefert

$$\varphi(t) \leq \varphi(0) + a\int_0^t \varphi(t')dt' \leq a\int_0^t \varphi(t')dt',$$

wobei wir in der zweiten Ungleichung verwendet haben, dass $\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) \leq 0$. Nach dem Lemma von Gronwall gilt also $\varphi(t) \leq 0$ für alle $t \in [0,\infty)$, d.h. $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ für alle $t \in [0,\infty)$.

(ii) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ -3 & -1-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{pmatrix} = -(1+\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 0 & -(1+\lambda) \end{pmatrix} \\ &= (1+\lambda)^2(2-\lambda). \end{aligned}$$

A hat daher die Eigenwerte -1, -1 und 2. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern}(A - 2\mathrm{I}) &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -3 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \\ \mathrm{Kern}(A + \mathrm{I}) &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\}, \\ \mathrm{Kern}(A + \mathrm{I})^2 &= \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 9 \\ -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathrm{span}\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \end{aligned}$$

Eine mögliche Wahl für ein Fundamentalsystem ist daher $\{\vec{\phi}_1, \vec{\phi}_2, \vec{\phi}_3\}$ mit

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_1(t) &= \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_2(t) &= \mathrm{e}^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \vec{\phi}_3(t) &= \mathrm{e}^{-t}\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t(A+\mathrm{I})\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\Big) = \mathrm{e}^{-t}\Big(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\Big). \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet dann

$$\vec{y}(t) = \sum_{i=1}^{3} C_i\vec{\phi}_i(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit Konstanten $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4 (4+16=20 Punkte)**:**

(i) Bestimmen Sie die Lösung $u(x,t)$ des Problems

$$\begin{aligned} &u_t - 4u_x = 0, && (x,t) \in \mathbb{R}^2, \\ &u(x,0) = \sin(x)\mathrm{e}^x, && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(ii) Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_t - 2tu_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Bestimmen Sie alle reellwertigen Lösungen von der Form $u(x,t) = w(x)v(t)$ mit geeigneten Funktionen v, w.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

(i) Nach der Formel aus der Vorlesung gilt

$$u(x,t) = \sin(x+4t)\mathrm{e}^{x+4t}, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Einsetzen des Ansatzes $u(x,t) = v(t)w(x)$ liefert

$$v'(t)w(x) - 2tv(t)w''(x) = 0.$$

Auf der Menge $\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : w(x)v(t) \neq 0\}$ gilt

$$\frac{v'(t)}{2tv(t)} = \frac{w''(x)}{w(x)}.$$

Da die beiden Seiten jeweils von verschiedenen Variablen abhängen, existiert eine Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$v'(t) = \alpha 2tv(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$
$$w''(x) = \alpha w(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Gleichung (1) impliziert, dass

$$v(t) = C\mathrm{e}^{\alpha \int_0^t 2t'dt'} = C\mathrm{e}^{\alpha t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Gleichung (2) ist eine homogene Gleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^2 - \alpha$.
Fall $\alpha > 0$: Dann sind $\pm\sqrt{\alpha}$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und w ist gegeben durch

$$w(x) = C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}x} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

für Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Fall $\alpha < 0$: Dann sind $\pm\mathrm{i}\sqrt{-\alpha}$ die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, und w ist gegeben durch

$$w(x) = C_1 \sin(\sqrt{-\alpha}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\alpha}x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

für $(x,t) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$ mit Konstanten $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$.
Fall $\alpha = 0$: Dann erfüllt w die Differentialgleichung $w''(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R}$, d.h. $w(x) = C_1x + C_2$ mit Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.
Insgesamt erhalten wir die Lösungen

$$u(x,t) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\alpha t^2}(\tilde{C}_1\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}x} + \tilde{C}_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}x}), & \alpha > 0, \\ \mathrm{e}^{\alpha t^2}(\tilde{C}_1 \sin(\sqrt{-\alpha}x) + \tilde{C}_2 \cos(\sqrt{-\alpha}x)), & \alpha < 0, \\ \tilde{C}_1x + \tilde{C}_2, & \alpha = 0. \end{cases}$$

für $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, mit Konstanten $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2 \in \mathbb{R}$. Dann sind alle Lösungen der Differentialgleichung aus der Aufgabenstellung von der Form $u(x,t) = w(x)v(t)$ gegeben durch Linearkombinationen der obigen drei Lösungen.