

Lösungsvorschlag zur Klausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Wintersemester 2024/2025

11. März 2025

Aufgabe 1 (30 Punkte):

- (a) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des folgenden linearen Differentialgleichungssystems mit konstanten Koeffizienten

$$y' = Ay, \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -3 \\ -4 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sie können verwenden, dass das charakteristische Polynom von A gegeben ist durch

$$p(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

- (b) Es seien $D := (0, \infty)^2$ und $P, Q \in C^1(D, \mathbb{R})$ definiert durch

$$P(x, y) := y(1 + xy), \quad Q(x, y) := -x \quad ((x, y) \in D).$$

- a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

nicht exakt ist in D .

- b) Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\mu \in C^1((0, \infty), \mathbb{R}) \setminus \{0\}$ der Form $\mu = \mu(y)$, sodass die Differentialgleichung

$$\mu(y)P(x, y)dx + \mu(y)Q(x, y)dy = 0$$

in D exakt ist. Bestimmen Sie weiter alle Lösungen der Gleichung in impliziter Form.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1:

- (a) Die Eigenwerte von A entsprechen den Nullstellen von p . Diese sind gegeben durch $-2, 1, 3$.

Wir berechnen nun die zugehörigen Eigenräume. Es gilt

$$E_1 = \ker(A - I) = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -3 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_{-2} = \ker(A + 2I) = \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \\ -4 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$E_3 = \ker(A - 3I) = \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -3 \\ -4 & -1 & -4 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nach Vorlesung erhalten wir ein Fundamentalsystem $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ mit

$$\phi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

- (b) Wir bemerken zunächst, dass D konvex ist. Wir definieren $P(x, y) = y(1 + xy)$, $Q(x, y) = -x$. Ist die DGL exakt in $D = (0, \infty)^2$ so muss nach Vorlesung die Gleichung $P_y(x, y) = Q_x(x, y)$ ($x, y \in \mathbb{R}$) gelten. Es ist jedoch $P_y(x, y) = 1 + 2xy \neq -1 = Q_x(x, y)$ für $(x, y) \in D$ und damit die DGL auch nicht exakt in D .

Nach Vorlesung ist die DGL

$$\mu(y)P(x, y)dx + \mu(y)Q(x, y)dy = 0$$

in D exakt, wenn μ der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$\mu'(y) = \frac{P_y(x, y) - Q_x(x, y)}{Q(x, y)}\mu(y) = -\frac{2}{y}\mu(y), \quad y > 0.$$

Als Lösung erhalten wir zum Beispiel den integrierenden Faktor $\mu(y) = y^{-2}$.

Wir bestimmen nun eine Stammfunktion F . Es muss gelten

$$F(x, y) = \int \mu(y)P(x, y)dx = \int \frac{1}{y} + x dx = \frac{x}{y} + \frac{1}{2}x^2 + c(y)$$

für eine Funktion $c \in C^1(0, \infty)$. Es folgt

$$-\frac{x}{y^2} + c'(y) = F_y(x, y) = \mu(y)Q(x, y) = -\frac{x}{y^2}$$

und damit $c'(y) = 0$. Wir erhalten also eine Stammfunktion $F(x, y) = x/y + 1/2x^2$ ($x, y > 0$). Alle Lösungen der Gleichung sind dann implizit gegeben durch

$$F(x, y) = C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (20 Punkte):

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$(1) \quad x^2 y''(x) - 2xy'(x) + \frac{13}{4}y(x) = 0.$$

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $y: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ von (1) mit Anfangsbedingung $y(1) = 0, y'(1) = 1$ und berechnen Sie den einseitigen Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 0+} y(x)$.

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 2:

Wir beachten zunächst, dass es sich um eine Eulersche Differentialgleichung handelt. Wir verwenden die Substitution aus der Vorlesung, um die Gleichung auf eine DGL mit konstanten Koeffizienten zu transformieren. Wir setzen

$$x = e^t, \quad u(t) = y(e^t), \quad y(x) = u(\ln(x)).$$

Dann gilt

$$\frac{du}{dt} = \frac{dy}{dx}x, \quad \frac{d^2u}{dt^2} = \frac{dy}{dx}x + \frac{d^2y}{dx^2}x^2$$

und wir erhalten

$$x^2 y'' - 2xy' + \frac{13}{4}y = u'' - 3u' + \frac{13}{4}u = 0$$

Die Gleichung in u ist eine linear DGL mit konstanten Koeffizienten. Das zugehörige charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + \frac{13}{4}$$

mit Nullstellen

$$\lambda_{\pm} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 13}}{2} = \frac{3}{2} \pm i.$$

Wir finden zunächst die zwei linear unabhängige Lösungen der DGL für u :

$$u_1(t) := e^{3t/2} \cos(t), \quad u_2(t) = e^{3t/2} \sin(t) (t \in \mathbb{R}).$$

und die allgemeine Lösung von (1) ist dann gegeben durch

$$y(x) = c_1 u_1(\ln(x)) + c_2 u_2(\ln(x)) = c_1 x^{3/2} \cos(\ln(x)) + c_2 x^{3/2} \sin(\ln(x)), \quad x > 0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Die Anfangsbedingungen liefern nun Gleichungen für $c_{1,2}$:

$$\begin{aligned} 0 &= y(1) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \\ 1 &= y'(1) = c_1 \frac{3}{2} x^{1/2} \cos(\ln(x)) - c_1 x^{1/2} \sin(\ln(x)) + \\ &\quad c_2 \frac{3}{2} x^{1/2} \sin(\ln(x)) + c_2 x^{1/2} \cos(\ln(x))|_{x=1} = c_1 \frac{3}{2} + c_2 = c_2. \end{aligned}$$

Schließlich erhalten wir die eindeutige Lösung des AWP's $y(x) = x^{3/2} \sin(\ln(x))$ ($x > 0$). Wegen $|\sin(x)| \leq 1$ sehen wir, dass

$$|y(x)| \leq x^{3/2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0+).$$

Aufgabe 3 (20 Punkte):

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$(2) \quad \begin{aligned} u' &= (1 - u - v)u, & u(0) &= u_0, \\ v' &= (1 - v - u)v, & v(0) &= v_0, \end{aligned} \quad u_0, v_0 > 0.$$

Nach den Sätzen der Vorlesung besitzt (2) eine eindeutig bestimmte Lösung $(u, v): [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(a) Zeigen Sie, dass $u(t), v(t) > 0$ für alle $t \in [0, \infty)$.

(b) Zeigen Sie die Ungleichungen

$$u'(t) \leq u(t), \quad v'(t) \leq v(t), \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

(c) Folgern Sie, dass

$$u(t) \leq u_0 e^t, \quad v(t) \leq v_0 e^t, \quad \text{für alle } t \in [0, \infty).$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3:

(a) Wir erkennen, dass u das lineare Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u' = (1 - u - v) \cdot u, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

löst. Die Lösungsformel für linear DGLs liefert dann

$$u(t) = u_0 \cdot \exp\left(\int_0^t (1 - u(s) - v(s)) ds\right) > 0,$$

da $u_0 > 0$. Für v kann man analog argumentieren.

(b) Nach (i) gilt $u(t), v(t) > 0$ für alle $t \in [0, \infty)$. Damit folgt für $t \in [0, \infty)$:

$$u'(t) = (1 - u(t) - v(t))u(t) = u(t) \underbrace{-u(t)^2 - v(t)u(t)}_{\leq 0} \leq u(t)$$

und analog

$$v'(t) = (1 - v(t) - u(t))v(t) = v(t) \underbrace{-v(t)^2 - u(t)v(t)}_{\leq 0} \leq v(t)$$

(c) Nach (ii) gilt

$$u(t) = u_0 + \int_0^t u'(s) ds \leq u_0 + \int_0^t u(s) ds$$

und das Lemma von Gronwall liefert für alle $t \in [0, \infty)$ die Abschätzung $u(t) \leq u_0 e^t$. Analog erhält man

$$v(t) = v_0 + \int_0^t v'(s) ds \leq v_0 + \int_0^t v(s) ds$$

und wieder liefert das Lemma von Gronwall die Ungleichung $v(t) \leq v_0 e^t$.

Aufgabe 4 (10 Punkte):

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung der Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) &= 0 \quad ((x, t) \in \mathbb{R}^2), \\ u(x, 0) &= x^2 \quad (x \in \mathbb{R}), \\ u_t(x, 0) &= \cos(x) \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Lösungsvorschlag zu Aufgabe 4:

Wir setzen $f(x) = x^2, g(x) = \cos(x)$. Nach Vorlesung ist die eindeutige Lösung der Wellengleichung gegeben durch

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(f(x-t) + f(x+t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy = \frac{1}{2}((x-t)^2 + (x+t)^2) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} \cos(y) dy \\ &= x^2 + t^2 + \frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t)) \end{aligned}$$