Aufgabe 1) a) $(1-i)^{\alpha i} = e^{\alpha i \log(1-i)}$

mit $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z) + i2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $-\pi < \arg(z) < \pi$

erhält man wegen $|1-i| = \sqrt{2}$, $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$

$\underline{\log(1-i) = \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} + i2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$. und hiermit

$$(1-i)^{\alpha i} = e^{\alpha\frac{\pi}{4} - \alpha 2k\pi}\left(\cos(\alpha \ln\sqrt{2}) + i\sin(\alpha\ln\sqrt{2})\right)$$

$\rightarrow$ $\underline{(1-i)^{\alpha i} \text{ ist reell}}$, falls $\sin(\alpha\ln\sqrt{2}) = 0$ oder $\underline{\alpha\ln\sqrt{2} = m\pi,}$ $\underline{m \in \mathbb{Z}}$ gilt.

b) Mit $z = x+iy$: $\sin z = \sin(x)\frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + i\cos(x)\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$

ist $\underline{\text{reell}}$, falls $e^{y} = e^{-y} \Longleftrightarrow \underline{y = 0 \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}}$ ~~ist~~

oder $\cos(x) = 0 \Longleftrightarrow x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$

also $z = (2k+1)\frac{\pi}{2} + it$ $(t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z})$

(Parallelen zur imaginären Achse)

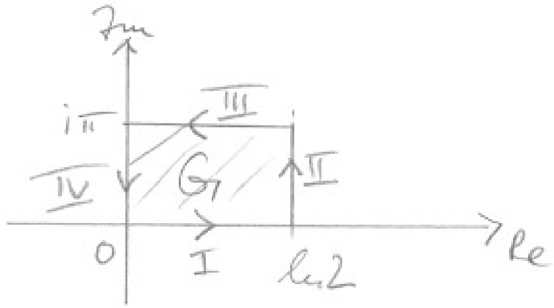
c) Real- und Imaginärteil holomorpher Funktionen sind harmonisch, also etwa (siehe b)):

$(\sin(z) \longrightarrow)$ $\underline{h_1(x,y) = \sin(x)\cosh(y),\ h_2(x) = \cos(x)\sinh(y)}$

$\left(\frac{1}{z} \longrightarrow\right)$ $\underline{h_3(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},\ h_4(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}}$ $((x,y) \neq (0,0))$

Aufgabe 2

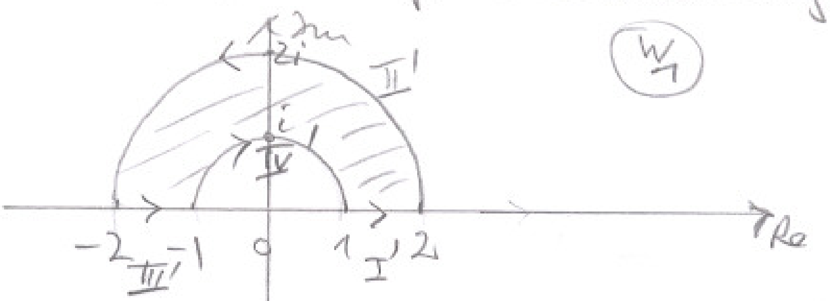
a)



b) Setze $w_1 = f_1(z) = e^z$ und $f_2(z) = \frac{iz+1}{1-iz} = \frac{z-i}{-i-z}$

dann gilt $w = f(z) = f_2(f_1(z))$

1. Schritt Bild von G unter f_1 (nach Vorlesung)



2. Schritt $w = f(z) = f_2(w_1) = \frac{i-w_1}{i+w_1}$ (Möbiustransf.)

Wir verwenden, dass Möbiustransformationen winkel- und kreistreu sind.
Die imaginäre Achse geht über in die reelle Achse, die reelle Achse geht über in den Einheitskreis
($\perp$ zu $\mathbb{R}$ in $f_2(0) = 1$, durch $f_2(1) = i$ und $f_2(-1) = -i$)

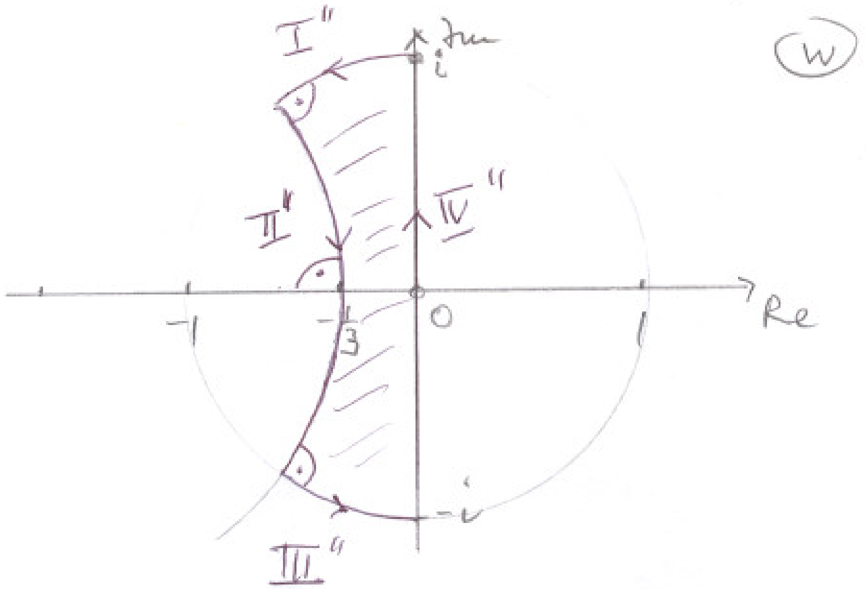
I'' ist das Stück auf $|w| = 1$ von $f_2(1) = i$ nach $f_2(2) = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$

und III'' das Stück auf $|w| = 1$ von $f_2(-2) = -\frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ nach $f_2(-1) = -i$.

(noch Aufgabe 2)

$\overline{II}''$ ist der Kreis $\perp$ zu $\mathbb{R}$ in $f_2(2i) = -\frac{1}{3}$ $\perp$ zu $|w| = 1$ durch $f_2(2)$ und $f_2(-2)$.

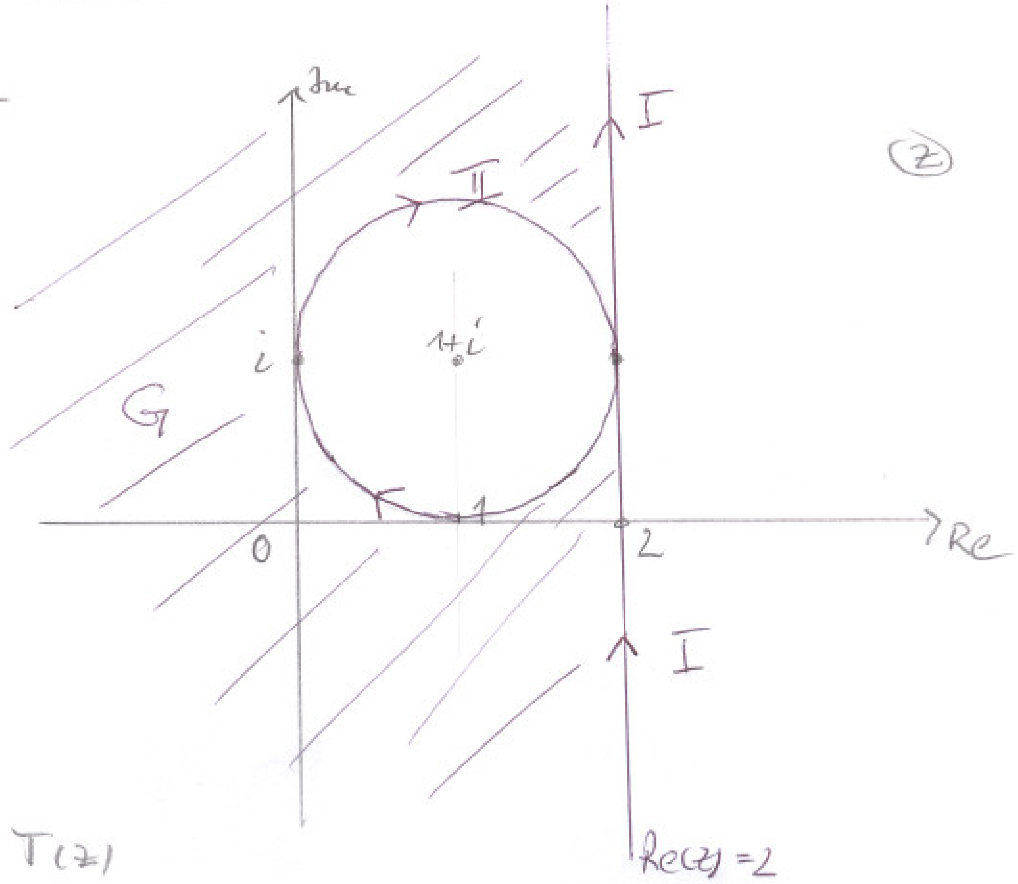
$\overline{IV}''$ (verläuft durch $-i$) ist die Gerade $\perp$ zu $|w| = 1$ in $f_2(-1) = -i$. Auf $\overline{IV}''$ liegt auch $f_2(i) = 0$



$f(G) = ≡$

Aufgabe 3

a)



$w = T(z)$

b) I: $\operatorname{Re}(z) = 2$, und II: $|z-1-i| = 1$ sollen auf die Geraden $\operatorname{Im}(w) = 0$ und $\operatorname{Im}(w) = \pi$ abgebildet werden.

Aus der Forderung $T(i) = i\pi$ folgt, dass II auf $\operatorname{Im}(w) = \pi$ abgebildet werden soll $\rightarrow T(\operatorname{Re}(z) = 2) \stackrel{!}{=} \{\operatorname{Im}(w) = 0\}$.

$2+i \in \mathrm{I} \cap \mathrm{II} \rightarrow T(2+i) = \infty$.

Da $4+i$ der Spiegelpunkt von i an $\{\operatorname{Re}(z) = 2\}$ ist, muss wegen des Hinweises $T(4+i) = -\pi i$

(das ist der Spiegelpunkt von πi an $\{\operatorname{Im}(w) = 0\}$)

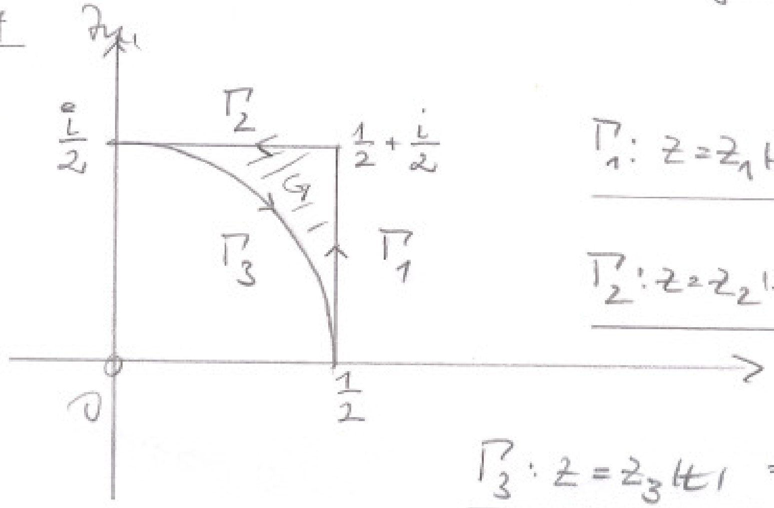
$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{mit } T(i) = i\pi,\ T(2+i) = \infty,\ T(4+i) = -\pi i$$

wird zu: $$\underline{T(z) = \frac{-2i\pi}{z-2-i}}$$

c) $\underline{f(z) = \exp(T(z))}$ (Eigenschaften von exp auch nach Vorlesung)

Aufgabe 4

a)



$\Gamma_1: z = z_1(t) = \frac{1}{2} + it, \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}$

$\Gamma_2: z = z_2(t) = \left(\frac{1}{2} - t\right) + \frac{i}{2}, \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}$

$\Gamma_3: z = z_3(t) = \frac{1}{2} i e^{-it}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\Gamma_1} z^2\,dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + it\right)^2 i\,dt = -\frac{1}{8} + \frac{i}{12}$$

$$\int_{\Gamma_2} z^2\,dz = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}(1+i) - t\right)^2 (-1)\,dt = \frac{1}{12} - \frac{i}{8}$$

$$\int_{\Gamma_3} z^2\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4} i^2 e^{-2it} \left(-\frac{1}{2} i^2\right) e^{-it}\,dt = \frac{1}{24} + \frac{i}{24}$$

b) $w = f(z) = u + iv$

$f(\Gamma_1): z_1^2(t) = \frac{1}{4} - t^2 + it, \quad 0 \le t \le \frac{1}{2} \rightarrow u = \frac{1}{4} - v^2, \quad 0 \le v \le \frac{1}{2}$

$f(\Gamma_2): z_2^2(t) = \left(\frac{1}{2} - t\right)^2 - \frac{1}{4} + i\left(\frac{1}{2} - t\right) \rightarrow u = v^2 - \frac{1}{4}, \quad 0 \le v \le \frac{1}{2}$

$f(\Gamma_3): z_3^2(t) = -\frac{1}{4} e^{-2it}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$