Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann

WS 2010/2011
29.01.2011

Übungsklausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie

Aufgabe 1 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Lösung von

$$(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0\,, \qquad y(1) = 2\,,$$

und geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung an.

Hinweis: Es gibt einen integrierenden Faktor, der nur von einer Variablen abhängt.

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' - \frac{1}{x}\,y - y^2 = \frac{1}{x^2}\,, \qquad y(1) = 0\,.$$

Hinweise: 1) Es gibt eine Lösung der Differentialgleichung der Form $y_0(x) = -x^\beta$ mit einem $\beta \in \mathbb{R}$ (die jedoch die Anfangsbedingung nicht erfüllt).
2) Das genaue Existenzintervall muss nicht angegeben werden.

Aufgabe 2 (5 + 5 = 10 Punkte)

a) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie A^k für jedes $k \in \mathbb{N}$.

ii) Bestimmen Sie e^{tA} für jedes $t \in \mathbb{R}$.

iii) Ermitteln Sie die Lösung von

$$\vec{y}\,' = A\vec{y}\,, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Geben Sie ein reelles Fundamentalsystem des Differentialgleichungssystems

$$\vec{y}\,' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{y}$$

an, und berechnen Sie die Lösung zu dem Anfangswert

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

– bitte wenden –

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Lösen Sie mit einem Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$y'' - 4x^2 y = 6xe^{x^2}\,, \qquad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

Geben Sie dabei eine Darstellung der Lösung in geschlossener Form an.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Sei $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0\}$. Betrachten Sie die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x u + \frac{1}{2y}\,\partial_y u = \frac{u^2}{x^2}$$

in D und bestimmen Sie die Lösung $u = u(x, y)$ dieser Differentialgleichung, die der Bedingung

$$u(1, \xi) = \frac{1}{\xi + 1} \qquad \text{für alle } \xi > 0$$

genügt. Wie sehen die Grundcharakteristiken aus?

Skizzieren Sie in der (x, y)-Ebene die Menge D und die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte vorgegeben sind, sowie einige Grundcharakteristiken (d.h. in etwa drei).

Überprüfen Sie, ob Ihre Berechnung tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung geliefert hat.

Auf welcher Teilmenge $\widetilde{D}$ von D ist die von Ihnen berechnete Lösung erklärt?

Viel Erfolg!

Nach der Klausur: Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, den 08.02.2011, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude) abgeholt werden.

Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, den 10.02.2011, von 13.30 Uhr bis 13.45 Uhr im Zimmer 3A-01 (Allianzgebäude) möglich.