

Übungsklausur
Höhere Mathematik III für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie
Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Die Differentialgleichung ist von der Form $P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ mit

$$P(x, y) := x - y^2, \quad Q(x, y) := 2xy.$$

Offenbar sind $P, Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Die Differentialgleichung ist nicht exakt, denn es gilt

$$P_y(x, y) - Q_x(x, y) = -2y - 2y = -4y.$$

Allerdings hängt

$$\frac{P_y - Q_x}{Q} = \frac{-4y}{2xy} = -\frac{2}{x}$$

nur von x ab, so dass es einen integrierenden Faktor μ , der nur von x abhängt, geben muss. Für $\mu = \mu(x)$ soll $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$ gelten, also

$$\mu P_y = \mu' Q + \mu Q_x, \quad \text{d. h.} \quad \mu' = \frac{P_y - Q_x}{Q} \mu = -\frac{2}{x} \mu.$$

Eine Lösung hiervon ist

$$\mu(x) = \exp\left(\int -\frac{2}{x} dx\right) = e^{-2\ln|x|} = \frac{1}{x^2}.$$

Für $x > 0$ haben wir damit einen integrierenden Faktor gefunden. Wir multiplizieren die Differentialgleichung mit $\mu(x) = x^{-2}$ und lösen die sich ergebende exakte Differentialgleichung

$$\frac{x - y^2}{x^2} dx + \frac{2y}{x} dy = 0.$$

Für eine zugehörige Stammfunktion $F: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soll $F_y(x, y) = \frac{2y}{x}$ gelten, daher ist

$$F(x, y) = \frac{y^2}{x} + c(x)$$

mit einer gewissen Funktion c , und damit ergibt sich

$$F_x(x, y) = -\frac{y^2}{x^2} + c'(x) \stackrel{!}{=} \frac{1}{x} - \frac{y^2}{x^2}.$$

Wir wählen $c(x) = \ln x$ und haben eine Stammfunktion der Differentialgleichung gefunden. Alle Lösungen sind dann implizit gegeben durch

$$F(x, y) = \frac{y^2}{x} + \ln x = C \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Wegen $F(1, 2) = 4$ folgt für die Lösung des Anfangswertproblems

$$F(x, y) = \frac{y^2}{x} + \ln x = 4,$$

so dass wegen $y(1) = 2 > 0$

$$y(x) = \sqrt{x(4 - \ln x)}$$

folgt. Dabei ist $(0, e^4)$ das maximale Existenzintervall der Lösung. Dieses ergibt sich aus den Forderungen $x > 0$ und $x(4 - \ln x) > 0$, welche genau für $x \in (0, e^4)$ erfüllt sind.

b) Es handelt sich um eine Riccatische Differentialgleichung und nach dem Hinweis wählen wir $y_0(x) = -x^\beta$ mit einem $\beta \in \mathbb{R}$ als Ansatz für eine spezielle Lösung. Damit ergibt sich $y'_0(x) - \frac{1}{x}y_0(x) - y_0(x)^2 = -\beta x^{\beta-1} + x^{\beta-1} - x^{2\beta} = x^{\beta-1}(-\beta + 1 - x^{\beta+1})$. Dies ist $= x^{-2}$ für $\beta = -1$, so dass $y_0(x) = -1/x$ eine Lösung der Differentialgleichung ist.

Alle weiteren Lösungen y bekommen wir nun mit dem Ansatz $u = y - y_0$. Dieser liefert für die Funktion u gemäß Vorlesung die Gleichung

$$u' + \left(-\frac{1}{x} + 2\frac{-1}{x}(-1)\right)u - u^2 = 0, \quad \text{also} \quad u' + \frac{1}{x}u - u^2 = 0.$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung mit Exponent $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als eine Lösung; alle anderen Lösungen erhalten wir, indem wir mit $(1 - \alpha)u^{-\alpha} = -u^{-2}$ multiplizieren und $z = u^{1-\alpha} = u^{-1}$ substituieren. Dies führt auf

$$z' - \frac{1}{x}z + 1 = 0.$$

Die homogene Gleichung $z' - \frac{1}{x}z = 0$ hat die allgemeine Lösung $z_h(x) = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, und mittels Variation der Konstanten erhalten wir $z_p(x) = -x \ln x$ als eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung. Die allgemeine Lösung der Gleichung für z ist damit

$$z(x) = z_h(x) + z_p(x) = Cx - x \ln x \quad (C \in \mathbb{R}).$$

Für u muss also $u(x) = 1/z(x) = (Cx - x \ln x)^{-1}$ mit geeignetem $C \in \mathbb{R}$ gelten und damit folgt $y(x) = u(x) + y_0(x) = -1/x + (Cx - x \ln x)^{-1}$.

Die Anfangsbedingung besagt $0 = y(1) = -1 + 1/C$, also $C = 1$. Als Lösung des Anfangswertproblems erhalten wir demnach $y(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x - x \ln x} = \frac{\ln x}{x(1 - \ln x)}$.

[Das maximale Existenzintervall der Lösung ergibt sich aus den Bedingungen $x > 0$ und $x(1 - \ln x) > 0$, was auf $(0, e)$ führt.]

Aufgabe 2

a) i) Es gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =: B.$$

Wir vermuten $A^k = B$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Dies bestätigen wir mittels vollständiger Induktion. Der Induktionsanfang ist bereits gemacht. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$. Für dieses k gelte $A^k = B$ (IV). Dann folgt

$$A^{k+1} = AA^k \stackrel{\text{IV}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = B.$$

a) ii) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k = I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \stackrel{i)}{=} I + tA + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^k}{k!} B = I + tA + (e^t - t - 1)B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t & t & 0 \\ -t & -t & 0 \\ t & t & t \end{pmatrix} + (e^t - t - 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t & t & 0 \\ -t & 1-t & 0 \\ e^t-1 & e^t-1 & e^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

a) iii) Die Lösung von $\vec{y}' = A\vec{y}$ zum Anfangswert $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ lautet

$$\vec{y}(t) = e^{tA} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+t \\ -t \\ 2e^t-1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) Die Matrix des Systems werde mit A bezeichnet. Wegen

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1) + 2 = \lambda^2 + 1$$

sind $\pm i$ die Eigenwerte von A . Zum (nicht-reellen) Eigenwert i gehört der Eigenraum

$$\text{Kern}(A - iI) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1-i & -2 \\ 1 & -1-i \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

so dass eine komplexe Lösung des Differentialgleichungssystems $\vec{y}' = A\vec{y}$ durch

$$e^{it} \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = (\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Die Aufteilung in Real- und Imaginärteil liefert dann die zwei reellen Lösungen

$$\vec{\phi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{\phi}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

und ein reelles Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist bestimmt, nämlich

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \cos t + \sin t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Lösung des Systems $\vec{y}' = A\vec{y}$ zum Anfangswert $\vec{y}(0) = (1, 0)$ lautet

$$\vec{y}(t) = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \Phi(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \end{pmatrix},$$

wobei wir die bekannte Formel für die Inversion einer 2×2 -Matrix

$$\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 0 - 1 \cdot 1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

benutzt haben.

Aufgabe 3

Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k,$$

wobei $c_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$, zu bestimmende Koeffizienten sind, führt auf

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k x^{k-1}, \quad y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2}.$$

Wegen der Anfangsbedingungen ist $c_0 = y(0) = 0$ und $c_1 = y'(0) = 1$. Eingesetzt in die linke Seite der Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} y''(x) - 4x^2 y(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} 4c_k x^{k+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} 4c_{n-2} x^n \\ &= 2c_2 + 6c_3 x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1) c_{n+2} - 4c_{n-2}] x^n. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der Differentialgleichung steht

$$6xe^{x^2} = 6x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6}{k!} x^{2k+1}.$$

Koeffizientenvergleich liefert also zum einen

$$2c_2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad 6c_3 = 6,$$

woraus $c_2 = 0$ bzw. $c_3 = 1$ folgt, und zum anderen

$$(n+2)(n+1)c_{n+2} - 4c_{n-2} = \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ \frac{6}{k!}, & n = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Aus der ersten Zeile folgt wegen $c_0 = c_2 = 0$ unmittelbar $c_{2k+2} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Daher gilt $c_n = 0$ für alle geraden $n \in \mathbb{N}_0$.

Die zweite Zeile liefert für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$(2k+3)(2k+2)c_{2k+3} - 4c_{2k-1} = \frac{6}{k!}, \quad \text{d.h.} \quad c_{2k+3} = \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} \left(\frac{6}{k!} + 4c_{2k-1} \right).$$

Wegen $c_1 = 1$ und $c_3 = 1$ ergeben sich dann die Werte

$$\begin{aligned} c_5 &= \frac{1}{5 \cdot 4} \left(6 + 4c_1 \right) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!}, \\ c_7 &= \frac{1}{7 \cdot 6} \left(\frac{6}{2} + 4c_3 \right) = \frac{1}{6} = \frac{1}{3!}, \\ c_9 &= \frac{1}{9 \cdot 8} \left(\frac{6}{6} + 4c_5 \right) = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!}, \end{aligned}$$

und damit kommen wir zu der Vermutung

$$c_{2k+1} = \frac{1}{k!} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},$$

welche wir induktiv beweisen. Der Induktionsanfang ist schon gemacht; es fehlt noch der Induktionsschluss: Sei $k \in \mathbb{N}$. Gelten $c_{2k+1} = \frac{1}{k!}$ und $c_{2k-1} = \frac{1}{(k-1)!}$ für dieses k (IV), so folgt

$$\begin{aligned} c_{2k+3} &= \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} \left(\frac{6}{k!} + 4c_{2k-1} \right) \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} \left(\frac{6}{k!} + \frac{4}{(k-1)!} \right) \\ &= \frac{1}{(2k+3)(2k+2)} \frac{1}{k!} (6 + 4k) = \frac{1}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

Wir fassen die gefundenen Ergebnisse zusammen

$$c_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ \frac{1}{k!}, & n = 2k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0. \end{cases}$$

Damit haben wir die Lösung des Anfangswertproblems ermittelt

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^{2k+1} = x e^{x^2}.$$

Aufgabe 4

Das charakteristische System der gegebenen Gleichung lautet

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= 1, \\ k_2'(s) &= \frac{1}{2k_2(s)}, \\ w'(s) &= \frac{w(s)^2}{k_1(s)^2}. \end{aligned}$$

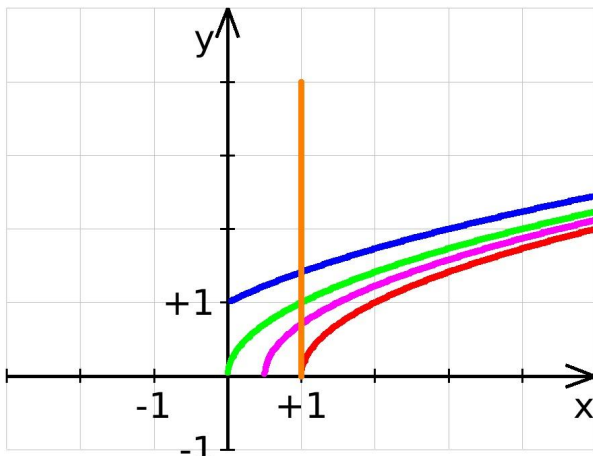
Die Kurve Γ für die Anfangswerte ist parametrisiert durch $\xi > 0$, es gilt $\Gamma = \{(1, \xi) : \xi > 0\}$. Zu festem $\xi > 0$ lauten die Anfangswerte für das charakteristische System

$$\begin{aligned} k_1(0) &= 1, \\ k_2(0) &= \xi, \\ w(0) &= \frac{1}{\xi + 1}. \end{aligned}$$

Für festes $\xi > 0$ erhält man $k_1(s) = s + 1$ als eindeutige Lösung der ersten Gleichung. Die zweite Gleichung lässt sich schreiben als $2k_2 k_2' = 1$, also $(k_2^2)' = 1$, was wegen des Anfangswerts $k_2^2(0) = \xi^2$ auf $k_2(s)^2 = s + \xi^2$ führt. Wegen $\vec{k}(s) \in D$ folgt $k_2(s) = \sqrt{s + \xi^2}$.

Wir bemerken, dass $k_2^2(s) = s + \xi^2 = s + 1 + \xi^2 - 1 = k_1(s) + \xi^2 - 1$ gilt, d.h. $y = \sqrt{x + \xi^2} - 1$ für $x > \max\{1 - \xi^2, 0\}$ oder $x = y^2 + 1 - \xi^2$.

Skizze (orange: Γ , blau: $\xi = \sqrt{2}$, grün: $\xi = 1$, lila: $\xi = 1/\sqrt{2}$, rot: $\xi = 0$, D : 1. Quadrant):



Berechnung der Lösung: Das Anfangswertproblem

$$w'(s) = \frac{w(s)^2}{k_1(s)^2} = \frac{w(s)^2}{(s+1)^2}, \quad w(0) = u(1, \xi) = \frac{1}{\xi+1}$$

kann man mit Trennung der Variablen lösen

$$\begin{aligned} \int_{w(0)}^w \frac{d\eta}{\eta^2} &= \int_0^s \frac{d\sigma}{(\sigma+1)^2} \iff \underbrace{\frac{1}{w(0)}}_{=\xi+1} - \frac{1}{w} = 1 - \frac{1}{s+1} \iff \frac{1}{w} = \xi + 1 - 1 + \frac{1}{s+1} \\ &\iff w(s, \xi) = \frac{1}{\frac{1}{s+1} + \xi}. \end{aligned}$$

Sei $(x, y) \in D$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \vec{k}(s, \xi) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\iff s+1 = x \text{ und } \sqrt{s+\xi^2} = y \\ &\iff s = x-1 \text{ und } y^2 = s+\xi^2 = x-1+\xi^2 \\ &\iff s = x-1 \text{ und } \xi = \sqrt{y^2+1-x}, \end{aligned}$$

wobei letzteres für $y^2+1-x > 0$, d.h. für $y > 0$ (wenn $x \in (0, 1]$) bzw. für $y > \sqrt{x-1}$ (wenn $x > 1$), gilt.

Insgesamt erhält man

$$u(x, y) = \frac{1}{\frac{1}{x} + \sqrt{y^2+1-x}}$$

und die Lösung existiert auf $\tilde{D} = \{(x, y) \in D : x \leq 1 \text{ oder } (x > 1 \text{ und } y > \sqrt{x-1})\}$.

Probe: Aus

$$\partial_x u(x, y) = -u(x, y)^2 \left(-\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{y^2+1-x}} \cdot (-1) \right)$$

und

$$\partial_y u(x, y) = -u(x, y)^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{y^2+1-x}} \cdot 2y \right)$$

folgt für jedes $(x, y) \in \tilde{D}$

$$\partial_x u(x, y) + \frac{1}{2y} \partial_y u(x, y) = \frac{u(x, y)^2}{x^2} - u(x, y)^2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{y^2+1-x}} + \frac{1}{2\sqrt{y^2+1-x}} \right) = \frac{u(x, y)^2}{x^2},$$

d.h. u ist tatsächlich Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Außerdem ist

$$u(1, \xi) = \frac{1}{1 + \sqrt{\xi^2+1-1}} = \frac{1}{\xi+1}$$

für jedes $\xi > 0$ erfüllt.