KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Markus Antoni

WS 2012/2013
26.01.2013

Übungsklausur

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte)

a) Lösen Sie das Riccatische Anfangswertproblem

$$y' - 2x^3 y + xy^2 = -x^5 + 3x, \qquad y(0) = 3.$$

Hinweis: Es gibt eine Lösung der Differentialgleichung der Form $y_0(x) = ax^2 + b$ für $a, b \in \mathbb{R}$ (die allerdings nicht die Anfangsbedingung erfüllt).

b) Geben Sie die allgemeine (reelle) Lösung der folgenden Differentialgleichung an:

$$y^{(4)} - 4y''' + 7y'' - 6y' + 2y = e^x.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Lösen Sie mit einem gewöhnlichen Potenzreihenansatz das Anfangswertproblem

$$xy''(x) - y'(x) - 4x^3 y(x) = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y''(0) = 0,$$

und geben Sie die Lösung in geschlossener Form an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{y}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4 (10 Punkte)

In $D := (0, \infty) \times \mathbb{R}$ betrachte man für $u = u(x,t)$ die Differentialgleichung

$$\partial_t u - x^2 \partial_x u = \big(t - \tfrac{1}{x}\big) u^2$$

mit der Anfangsbedingung

$$u(\xi, 0) = \xi^2, \quad \xi > 0.$$

Lösen Sie dieses Anfangswertproblem mit der Charakteristikenmethode und überprüfen Sie, ob ihre Berechnung tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung geliefert hat.

Skizzieren Sie in der (x,t)-Ebene die Menge D und die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte vorgegeben sind, sowie drei Grundcharakteristiken. Auf welchem Teilgebiet $\widetilde{D}$ von D mit $\Gamma \subset \widetilde{D}$ existiert die von Ihnen berechnete Lösung?

Viel Erfolg!

Nach der Klausur:

- Die korrigierten Übungsklausuren können ab Dienstag, dem 05.02.2013, im Sekretariat (Zimmer 3B-02, Allianzgebäude) abgeholt werden.
- Fragen zur Korrektur sind ausschließlich am Donnerstag, dem 07.02.2013, von 13:15 bis 13:30 Uhr im Zimmer 3A-27 (Allianzgebäude) möglich.