KARLSRUHER INSTITUT FÜR TECHNOLOGIE (KIT) WS 2012/2013
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. Peer Kunstmann
Markus Antoni

Übungsklausur

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

a) Wie im Hinweis angegeben, wählen wir $y_0(x) = ax^2 + b$ als Ansatz für eine spezielle Lösung. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} &2ax - 2x^3(ax^2+b) + x(a^2x^4 + 2abx^2 + b^2) \\ &\quad = (a^2-2a)x^5 + (2ab-2b)x^3 + (2a+b^2)x \overset{!}{=} -x^5 + 3x \\ \iff &a^2 - 2a = -1,\ 2b(a-1) = 0,\ 2a + b^2 = 3 \iff a = 1,\ b = \pm 1. \end{aligned}$$

D.h. die Funktionen $y_0(x) = x^2 \pm 1$ sind Lösungen der Differentialgleichung, von denen wir uns für die weitere Rechnung eine heraussuchen können. Wir wählen $y_0(x) = x^2+1$. Dann führt der Ansatz $u(x) = y(x) - y_0(x)$ nach Vorlesung auf die Differentialgleichung

$$u' + \big(-2x^3 + 2x(x^2+1)\big)u + xu^2 = 0 \iff u' + 2xu + xu^2 = 0.$$

Dies ist eine Bernoulli-Differentialgleichung mit Exponenten $\alpha = 2$. Sie hat $u \equiv 0$ als Lösung (sie hat aber für das Anfangswertproblem keine weitere Bedeutung, da in diesem Fall $y(x) = u(x) + y_0(x) = y_0(x)$ die Anfangsbedingung nicht erfüllt). Für $u \neq 0$ führt die Substitution $z := u^{1-\alpha} = u^{-1}$ auf die lineare Differentialgleichung

$$z' = 2xz + x.$$

Die zugehörige homogene Gleichung $z' = 2xz$ hat die allgemeine Lösung $z_{\text{hom}}(x) = ce^{x^2}$, $c \in \mathbb{R}$. Eine spezielle Lösung erhalten wir mittels Variation der Konstanten. Setzen wir den Ansatz $z_{\text{p}}(x) = c(x)e^{x^2}$ in die inhomogene Differentialgleichung ein, so erhalten wir

$$c'(x)e^{x^2} = x \iff c(x) = \int xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x + const. = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + const.$$

Damit ist $z_{\text{p}}(x) = c(x)e^{x^2} = -\frac{1}{2}$ eine spezielle Lösung und $z(x) = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$, $c \in \mathbb{R}$, die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für z. Rücksubstitution führt dann auf

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} + y_0(x) = \frac{2}{2ce^{x^2} - 1} + x^2 + 1, \quad c \in \mathbb{R}.$$

— bitte wenden —

Setzen wir nun die Anfangsbedingung ein, so erhalten wir

$$y(0) = \frac{2}{2c-1} + 1 = 3 \iff c = 1,$$

also löst $y(x) = \frac{2}{2e^{x^2}-1} + x^2 + 1$ für $x \in \mathbb{R}$ das Anfangswertproblem.

Anmerkung: Wurde in obiger Rechnung $y_0(x) = x^2 - 1$ gewählt, so erhalten wir nach Substitutionen die Differentialgleichung $z' = -2xz + x$, mit der allgemeinen Lösung $z(x) = ce^{-x^2} + \frac{1}{2}$. Die Riccatische Differentialgleichung hat dann die Lösung $y(x) = \frac{2}{2ce^{-x^2}+1} + x^2 - 1$, $c \in \mathbb{R}$, und das Einsetzen der Anfangsbedingung führt auf $c = -\frac{1}{4}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann (wie auch oben)

$$y(x) = \frac{2}{-\frac{1}{2}e^{-x^2}+1} + x^2 - 1 = \frac{2}{2e^{x^2}-1} + x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

b) Es handelt sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten. Wir bestimmen zunächst die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung mit dem Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dieser führt auf das charakteristische Polynom

$$\lambda^4 - 4\lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2\big(\lambda - (1+i)\big)\big(\lambda - (1-i)\big)$$

mit der zweifachen Nullstelle $\lambda_1 = 1$ und den beiden komplexen Nullstellen $\lambda_{2/3} = 1 \pm i$. Damit ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung gegeben durch

$$y_{\text{hom}}(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^x\cos(x) + c_4e^x\sin(x), \quad c_1,\, c_2,\, c_3,\, c_4 \in \mathbb{R}.$$

Nun brauchen wir noch eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung, die wir mit einem Ansatz vom Typ der rechten Seite finden wollen. Da "$\sigma = 1$" eine zweifache Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, wählen wir

$$y_{\text{p}}(x) = ax^2e^x, \quad a \in \mathbb{R},$$

als Ansatz. Dieser hat die Ableitungen

$$\begin{aligned} y_{\text{p}}'(x) &= (2x + x^2)ae^x, \\ y_{\text{p}}''(x) &= (2 + 4x + x^2)ae^x, \\ y_{\text{p}}'''(x) &= (6 + 6x + x^2)ae^x, \\ y_{\text{p}}^{(4)}(x) &= (12 + 8x + x^2)ae^x. \end{aligned}$$

Setzen wir dies ein, so folgt

$$y_{\text{p}}^{(4)} - 4y_{\text{p}}''' + 7y_{\text{p}}'' - 6y_{\text{p}}' + 2y_{\text{p}} = 2ae^x \stackrel{!}{=} e^x \iff a = \frac{1}{2}.$$

Damit ist $y_{\text{p}}(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$ eine spezielle Lösung und

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2e^x + c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^x\cos(x) + c_4e^x\sin(x), \quad c_1,\, c_2,\, c_3,\, c_4 \in \mathbb{R}$$

die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

— bitte wenden —

Aufgabe 2

Der Potenzreihenansatz

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_k \in \mathbb{R},$$

mit

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \end{aligned}$$

führt auf

$$xy''(x) - y'(x) - 4x^3 y(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} - 4\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+3}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} &\overset{\ell=k-1}{=} \sum_{\ell=1}^{\infty} (\ell+1)\ell a_{\ell+1} x^\ell = 2a_2 x + 6a_3 x^2 + \sum_{\ell=3}^{\infty} (\ell+1)\ell a_{\ell+1} x^\ell \\ \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} &\overset{\ell=k-1}{=} \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) a_{\ell+1} x^\ell = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \sum_{\ell=3}^{\infty} (\ell+1) a_{\ell+1} x^\ell \\ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+3} &\overset{\ell=k+3}{=} \sum_{\ell=3}^{\infty} a_{\ell-3} x^\ell. \end{aligned}$$

Setzen wir dies zusammen, so folgt

$$\begin{aligned} &xy''(x) - y'(x) - 4x^3 y(x) \\ &= 2a_2 x + 6a_3 x^2 - a_1 - 2a_2 x - 3a_3 x^2 + \sum_{\ell=3}^{\infty} \big((\ell+1)\ell a_{\ell+1} - (\ell+1) a_{\ell+1} - 4a_{\ell-3}\big) x^\ell \\ &= -a_1 + 3a_3 x^2 + \sum_{\ell=3}^{\infty} \big((\ell-1)(\ell+1) a_{\ell+1} - 4a_{\ell-3}\big) x^\ell \overset{!}{=} 0 \end{aligned}$$

genau dann, wenn

$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0 \quad \text{und} \quad a_{\ell+1} = \frac{4}{(\ell-1)(\ell+1)} a_{\ell-3}, \ \ell \in \mathbb{N}_{\ell \geqslant 3}.$$

bzw.

$$a_k = \frac{4}{(k-2)k} a_{k-4}, \ k \in \mathbb{N}_{k \geqslant 4}.$$

Aus den Nebenbedingungen folgt außerdem $a_0 = 1$ und $a_2 = 0$. D.h.:

$$\begin{array}{lclcl} a_0 = 1 & \Rightarrow & a_4 = \frac{4}{2\cdot 4} \cdot 1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2!} & \Rightarrow & a_8 = \frac{4}{6\cdot 8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24} = \frac{1}{4!} \\ a_1 = 0 & \Rightarrow & a_5 = 0 & \Rightarrow & a_9 = 0 \\ a_2 = 0 & \Rightarrow & a_6 = 0 & \Rightarrow & a_{10} = 0 \\ a_3 = 0 & \Rightarrow & a_7 = 0 & \Rightarrow & a_{11} = 0. \end{array}$$

— bitte wenden —

Ausgehend davon vermuten wir

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{(\frac{k}{2})!}, & \text{falls } k = 4m \text{ für } m \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

was wir mit vollständiger Induktion beweisen wollen. Den Induktionsanfang haben wir oben bereits gesehen. Gehen wir davon aus, dass die Behauptung für ein festes, aber beliebiges $k \in \mathbb{N}_0$ wahr ist, so folgt im Falle $k = 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}_0$

$$a_{k+4} = \frac{4}{(k+2)(k+4)} a_k = \frac{1}{(\frac{k}{2}+1)(\frac{k}{2}+2)} \cdot \frac{1}{(\frac{k}{2})!} = \frac{1}{(\frac{k}{2}+2)!} = \frac{1}{(\frac{k+4}{2})!}$$

Und im zweiten Fall gilt

$$a_{k+4} = \frac{4}{(k+2)(k+4)} a_k = 0,$$

was den Induktionsbeweis abschließt. Damit erhalten wir

$$y(x) = \sum_{\substack{k=0, \\ k \text{ Vielfaches von } 4}}^{\infty} \frac{1}{(\frac{k}{2})!} x^k \overset{k=4m}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m)!} x^{4m} = \cosh(x^2).$$

Aufgabe 3

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b}(t) := \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & -3 \\ 1 & -\lambda & -3 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -(\lambda+2)(\lambda-1)^2,$$

d.h. die Eigenwerte von A sind $\lambda_1 = -2$ (mit Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 1$ (mit Vielfachheit 2). Die zugehörigen Eigenräume sind gegeben durch:

$$\text{Kern}(A + 2I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\text{Kern}(A - I) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

also ist A nicht diagonalisierbar. Zum Berechnen weiterer linear unabhängiger Lösungen benötigen wir noch

$$\text{Kern}(A - I)^2 = \text{Kern} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \text{lin}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

— bitte wenden —

Damit erhalten wir das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned}
\vec{\phi}_1(t) &= e^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\\
\vec{\phi}_2(t) &= e^{t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\\
\vec{\phi}_3(t) &= e^{t}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t(A-I)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right] = e^{t}\begin{pmatrix}1+t\\t\\0\end{pmatrix},
\end{aligned}$$

bzw.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{t} & (1+t)e^{t}\\ e^{-2t} & e^{t} & te^{t}\\ e^{-2t} & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung ist damit $\vec{y}_{\text{hom}}(t) = \Phi(t)\vec{c}$, $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$.

Für eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung benutzen wir die „Variation der Konstanten"-Formel, und dafür wiederum benötigen wir $\Phi(s)^{-1}$. Dieses ist gegeben durch

$$\Phi(s)^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & e^{2s}\\ -se^{-s} & (1+s)e^{-s} & -e^{-s}\\ e^{-s} & -e^{-s} & 0\end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\vec{y}_{\mathrm{p}}(t) &= \Phi(t)\int_0^t \Phi(s)^{-1}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \Phi(t)\int_0^t \begin{pmatrix}-1\\1+e^{-3s}\\0\end{pmatrix}\mathrm{d}s = \Phi(t)\begin{pmatrix}-t\\t-\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}-te^{-2t}+te^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\\ -te^{-2t}+te^{t}-\frac{1}{3}e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{t}\\ -te^{-2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(t+\frac{1}{3})e^{t}-(t+\frac{1}{3})e^{-2t}\\ (t+\frac{1}{3})e^{t}-(t+\frac{1}{3})e^{-2t}\\ -te^{-2t}\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung in die allgemeine Lösung $\vec{y}(t) = \vec{y}_{\text{hom}}(t) + \vec{y}_{\mathrm{p}}(t)$ liefert dann

$$\vec{y}(0) = \begin{pmatrix}c_1+c_2+c_3\\ c_1+c_2\\ c_1\end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \iff c_1 = 0,\ c_2 = 2,\ c_3 = -1.$$

und wir erhalten als Lösung des Anfangswertproblems

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix}e^{-2t} & e^{t} & (1+t)e^{t}\\ e^{-2t} & e^{t} & te^{t}\\ e^{-2t} & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}(t+\frac{1}{3})e^{t}-(t+\frac{1}{3})e^{-2t}\\ (t+\frac{1}{3})e^{t}-(t+\frac{1}{3})e^{-2t}\\ -te^{-2t}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{4}{3}e^{t}-(t+\frac{1}{3})e^{-2t}\\ \frac{7}{3}e^{t}-(t+\frac{1}{3})e^{-2t}\\ -te^{-2t}\end{pmatrix}.$$

Anmerkung: Ebenfalls möglich ist es, die Lösung mittels der Matrixexponentialfunktion e^{tA} auszurechnen. Mit $\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ folgt

$$e^{tA} = \Phi(t)\Phi(0)^{-1} = \begin{pmatrix} (1+t)e^t & -te^t & e^{-2t} - e^t \\ te^t & (1-t)e^t & e^{-2t} - e^t \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix},$$

und ähnlich wie oben erhalten wir

$$\vec{y}_{\mathrm{p}}(t) = \int_0^t e^{(t-s)A}\vec{b}(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^t \begin{pmatrix} e^t - e^{-2t} + e^{t-3s} \\ e^t - e^{-2t} + e^{t-3s} \\ e^{-2t} \end{pmatrix} \mathrm{d}s = \begin{pmatrix} (t+\frac{1}{3})e^t - (t+\frac{1}{3})e^{-2t} \\ (t+\frac{1}{3})e^t - (t+\frac{1}{3})e^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix},$$

sowie

$$\vec{y}(t) = e^{tA}\vec{y}_0 + \vec{y}_{\mathrm{p}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}e^t - (t+\frac{1}{3})e^{-2t} \\ \frac{7}{3}e^t - (t+\frac{1}{3})e^{-2t} \\ -te^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Das charakteristische System der Gleichung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1'(s) &= -k_1(s)^2, \\ k_2'(s) &= 1, \\ w'(s) &= \big(k_2(s) - \tfrac{1}{k_1(s)}\big)w(s)^2. \end{aligned}$$

Außerdem ist die Kurve Γ, auf der die Anfangswerte liegen, gegeben durch

$$\Gamma = \big\{(\xi, 0),\ \xi > 0\big\}.$$

D.h. für festes $\xi > 0$ haben wir für obiges System die Anfangswerte

$$k_1(0) = \xi, \quad k_2(0) = 0, \quad w(0) = \xi^2.$$

Mit Trennung der Variablen finden wir für die erste Gleichung die allgemeine Lösung $k_1(s) = \frac{1}{s+c_1}$, $c_1 \in \mathbb{R}$. Setzen wir hier den Anfangswert ein, so folgt $c_1 = \frac{1}{\xi}$ und somit

$$k_1(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{\xi}} = \frac{\xi}{s\xi + 1}.$$

Für die zweite Gleichung finden wir die allgemeine Lösung $k_2(s) = s + c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$, sowie nach Einsetzen der Anfangsbedungung $c_2 = 0$. D.h.

$$k_2(s) = s.$$

Die Grundcharakteristiken sind also gegeben durch

$$\vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} \frac{\xi}{s\xi+1} \\ s \end{pmatrix}.$$

Für w erhalten wir schließlich das Anfangswertproblem

$$w'(s) = -\frac{1}{\xi} w(s)^2, \quad w(0) = \xi^2,$$

das wir wieder mit Trennung der Variablen lösen können. Hier erhalten wir

$$w(s) = \frac{1}{\frac{1}{\xi}s + c_3} = \frac{\xi}{s + \xi c_3}, \quad c_3 \in \mathbb{R},$$

und der Anfangswert liefert schließlich noch $c_3 = \frac{1}{\xi^2}$. Somit folgt

$$w(s) = \frac{\xi}{s + \frac{1}{\xi}} = \frac{\xi^2}{s\xi + 1}.$$

Für die Grundcharakteristiken gilt nun

$$\begin{aligned} \vec{k}(s,\xi) = \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{\xi}{s\xi + 1} = x, \; s = t \quad \overset{sx \neq 1}{\Longleftrightarrow} \quad \xi = \frac{x}{1 - sx}, \; s = t \\ &\Longleftrightarrow \quad \xi = \frac{x}{1 - tx}, \; s = t \end{aligned}$$

sowie

$$x = k_1(s,\xi) = \frac{1}{s + \frac{1}{\xi}} \overset{s=t}{=} \frac{1}{t + \frac{1}{\xi}} \leqslant \frac{1}{t}, \quad \text{für alle } \xi > 0.$$

Zusammen mit der Einschränkung $tx \neq 1$ bzw. $t \neq \frac{1}{x}$ haben wir also $t < \frac{1}{x}$. Dies liefert schließlich

$$u(x,t) = u(\vec{k}(s,\xi)) = w\big(t, \tfrac{x}{1-tx}\big) = \frac{x^2}{1 - tx}$$

und die Lösung existiert auf der Menge $\widetilde{D} := \{(x,t) \in D : t < \frac{1}{x}\}$.

Wir machen noch die Probe: Mit

$$\partial_t u = \frac{x^3}{(1-tx)^2}, \quad \partial_x u = \frac{2x - tx^2}{(1-tx)^2}, \quad u^2 = \frac{x^4}{(1-tx)^2}$$

folgt für $(x,t) \in \widetilde{D}$

$$\begin{aligned} \partial_t u - x^2 \partial_x u = \frac{x^3 - 2x^3 + tx^4}{(1-tx)^2} &= \frac{tx^4 - x^3}{(1-tx)^2} = \big(t - \tfrac{1}{x}\big)\frac{x^4}{(1-tx)^2} \\ &= \big(t - \tfrac{1}{x}\big)u^2. \end{aligned}$$

Außerdem gilt für alle $\xi > 0$

$$u(\xi, 0) = \frac{\xi^2}{1 - 0 \cdot \xi} = \xi^2,$$

d.h. u ist tatsächlich Lösung des Anfangswertproblems.

Skizze: