

Höhere Mathematik III
für die Fachrichtung Physik
Übungsklausur

Aufgabe 1

a) Wir bestimmen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = -y + \frac{1}{x \ln x} y + \cos x \ln x.$$

Die dazugehörige homogene Gleichung ist

$$y' = -y + \frac{1}{x \ln x} y.$$

Ihre Lösung ist gegeben durch

$$y_h(x) = \exp\left(\int \left(-1 + \frac{1}{x \ln x}\right) dx\right).$$

Es gilt

$$\frac{1}{x \ln x} = \frac{\ln' x}{\ln x} = (\ln(\ln x))'.$$

Daher gilt $y_h(x) = C \exp(-x + \ln(\ln x)) = C \ln x \exp(-x)$ mit einer Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Eine spezielle Lösung ist gegeben durch die Formel der Variation der Konstanten

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_h(x) \int \frac{\cos x \ln x}{y_h(x)} dx \\ &= e^{-x} \ln x \int e^x \cos x dx. \end{aligned}$$

Um das Integral auszurechnen, verwenden wir $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$. Damit ergibt sich

$$\int e^x \cos x dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x).$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = C e^{-x} \ln x + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) \ln x.$$

a) Wir lösen das Anfangswertproblem

$$y' - xy = -\frac{2x}{y}, y(0) = \sqrt{2}.$$

Es liegt eine Bernoullische Differentialgleichung vor. Durch Multiplikation beider Seiten mit

$$\mu(x) = \exp\left(\int -x dx\right) = e^{-x^2/2}$$

erhalten wir für $u(x) := \mu(x)y(x)$ die Gleichung $u' = -2xe^{-x^2}u^{-1}$. Dies ist eine Gleichung mit getrennten Variablen, die wir mit üblichen Methoden lösen

$$\int u du = u^2/2 = \int -2xe^{-x^2} dx = e^{-x^2} + C.$$

Damit gilt $u^2(x) = 2(e^{-x^2} + C)$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Ferner gilt $u(0) = \mu(0)y(0) = \sqrt{2}$ und somit $u^2(0) = 2$, also gilt $C = 0$. Ferner ist u positiv in einer Umgebung von 0. Wir folgern $u(x) = \sqrt{2e^{-x^2}} = \sqrt{2}e^{-x^2/2}$. Also gilt $y(x) = u(x)/\mu(x) = \sqrt{2}$.

Aufgabe 2

Wir lösen das Anfangswertproblem

$$xydx + \frac{1}{2}x^2(1 - y \tan y)dy = 0, y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Wir setzen $f(x, y) := xy$, $g(x, y) := \frac{1}{2}x^2(1 - y \tan y)$. Es gilt $f_y(x, y) = x$ und $g_x(x, y) = x(1 - y \tan y)$. Da $f_y \neq g_x$, ist die Gleichung nicht exakt. Ferner gilt

$$\frac{f_y - g_x}{g} = \frac{2y \tan y}{x(1 - y \tan y)}.$$

Wir folgern, dass es keinen integrierenden Faktor gibt, der nur von x abhängt. Wegen

$$\frac{g_x - f_y}{f} = -\tan y$$

gibt es einen integrierenden Faktor μ , der nur von y abhängt. Für μ gilt

$$\mu' = \frac{g_x - f_y}{f} \mu = -\tan y \cdot \mu.$$

Wir erhalten

$$\mu = \exp\left(\int (-\tan y) dy\right) = \exp\left(\int \frac{-\sin y}{\cos y} dy\right) = \exp(\ln(\cos y)) = \cos y.$$

Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit μ und erhalten die exakte Gleichung

$$xy \cos y dx + \frac{1}{2}x^2 \cos y(1 - \tan y)dy = 0.$$

Ist F eine Stammfunktion des zugehörigen Vektorfeldes, so gilt $F_x(x, y) = xy \cos y$ und somit $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cos y + \varphi(y)$. Nun muss gelten $F_y(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cos y(1 - \tan y) = \frac{1}{2}x^2(\cos y - \sin y)$. Wegen $F_y(x, y) = \frac{1}{2}x^2 \cos y - \frac{1}{2}x^2 y \sin y + \varphi'(y) = \frac{1}{2}x^2(\cos y - \sin y)$ folgt $\varphi' = 0$. Damit können wir $\varphi = 0$ nehmen. Wir erhalten $F(x, y) = \frac{1}{2}x^2 y \cos y$. Damit lautet die Lösung der Gleichung implizit $\frac{1}{2}x^2 y \cos y = C$ für ein $C \in \mathbb{R}$. Wegen der Anfangsbedingung folgt $C = F(1, \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$. Damit haben wir

$$x^2 y \cos y = \frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Aufgabe 3

Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' = 48x - 24$. Das charakteristische Polynom lautet $p(\lambda) = \lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 = \lambda^3(\lambda - (1 + i))(\lambda - (1 - i))$. Daraus lesen wir ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung ab: $\{1, x, x^2, e^x \cos x, e^x \sin x\}$. Für eine spezielle Lösung machen wir den polynomiellen Ansatz $y_s(x) = ax^4 + bx^3$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} y'_s(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 \\ y''_s(x) &= 12ax^2 + 6bx \\ y'''_s(x) &= 24ax + 6b \\ y^{(4)}_s(x) &= 24a \\ y^{(5)}_s(x) &= 0. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $48ax - 48a + 12b = 48x - 24$ und daher $a = 1, b = 2$. Damit lautet die allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^x \cos x + c_5 e^x \sin x + x^4 + 2x^3.$$

Aufgabe 4

Gesucht ist die Lösung des Anfangswertproblems:

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Wir machen einen Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ y''(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} x^n. \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert:

$$(-4a_0 + 2a_2) + (6a_3 - 10a_1)x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n]x^n = 0.$$

Wegen $1 = y(0) = a_0$ und $0 = y'(0) = a_1$ folgt $a_0 = 1, a_1 = 0$. Damit gilt:

$$(-4 + 2a_2) + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n]x^n = 0.$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$-4 + 2a_2 = 0$$

$$6a_3 = 0$$

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n = 0 \text{ für } n \geq 2.$$

Also gilt $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = 0$ und $a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}a_n$ für $n \geq 2$. Wir beweisen mit vollständiger Induktion, dass gilt $a_{2k+1} = 0, a_{2k} = k+1, k \in \mathbb{N}$.

Wegen $a_1 = 0$ und $a_0 = 1$ ist der Induktionsanfang schon gemacht. Wir nehmen an, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_{2k+1} = 0$. Dann gilt $a_{2(k+1)+1} = a_{(2k+1)+2} = \frac{2k+5}{2k+3}a_{2k+1} = 0$. Jetzt nehmen wir an, dass für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_{2k} = k+1$. Dann gilt $a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = \frac{2k+4}{2k+2}a_{2k} = \frac{k+2}{k+1}(k+1) = k+2 = (k+1)+1$. Damit gilt unsere Behauptung.

Wir erhalten also:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}.$$

Wegen $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[2n]{n+1} = 1$ ist der Konvergenzradius der Reihe $R = 1$.