

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zur Übungsklausur

Aufgabe 1:

Weitere Lösungen y der Differentialgleichung ergeben sich durch die Substitution $u = y - y_p$. Dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u'(x) &= y'(x) - y_p'(x) \stackrel{\text{DGL}}{=} -u(x) - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} e^x \underbrace{(y^2(x) - y_p^2(x))}_{(y(x)-y_p(x))(y(x)+y_p(x))} \\ &= -u(x) - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} e^x u(x)(y(x) + y_p(x)) = -u(x) - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} e^x u(x)(u(x) + 2y_p(x)) \\ &= \left(\frac{(1+x)^2}{1+x^2} - 1 \right) u(x) - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} e^x u^2(x) = \frac{2x}{1+x^2} u(x) - \frac{(1+x)^2}{1+x^2} e^x u^2(x). \end{aligned}$$

Dies ist eine Bernoullische Differentialgleichung. Wir substituieren deshalb weiter $v = \frac{1}{u}$. Es folgt $v' = -\frac{u'}{u^2}$ und damit die Differentialgleichung

$$v'(x) = \underbrace{-\frac{2x}{1+x^2}}_{=:a(x)} v(x) + \underbrace{\frac{(1+x)^2}{1+x^2} e^x}_{=:b(x)}.$$

Dies ist eine lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten für v . Ihre homogene Lösung ist gegeben durch

$$v_h(x) = e^{\int a(x) dx} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Es folgt

$$\int a(x) dx = - \int \underbrace{\frac{2x}{1+x^2}}_{=f'} dx = -\log(1+x^2) \Rightarrow v_h(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Variation-der-Konstanten-Formel liefert eine partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} v_p(x) &= e^{\int a(x) dx} \int e^{-\int a(x) dx} b(x) dx = \frac{1}{1+x^2} \int \underbrace{e^x}_{=f'(x)} \underbrace{(1+x)^2}_{=g(x)} dx \\ &\stackrel{\text{Part. Int}}{=} \frac{1}{1+x^2} \left(e^x(1+x)^2 - 2 \int \underbrace{e^x}_{=f'(x)} \underbrace{(1+x)}_{=g(x)} dx \right) \\ &\stackrel{\text{Part. Int}}{=} \frac{1}{1+x^2} \left(e^x(1+x)^2 - 2e^x(1+x) + 2 \int e^x dx \right) \\ &= \frac{e^x}{1+x^2} ((1+x)^2 - 2 - 2x + 2) = e^x. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für v lautet also

$$v(x) = C \frac{1}{1+x^2} + e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

mit der freien Konstanten $C \in \mathbb{R}$.

Die Anfangsbedingung $y(0) = 0$ zusammen mit $y_p(0) = \frac{1}{2}$ liefert $u(0) = y(0) - y_p(0) = -\frac{1}{2}$ und damit

$$v(0) = C + 1 = \frac{1}{u(0)} = -2 \Rightarrow C = -3.$$

Wir bemerken, dass $v(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, weshalb die Transformation $v = \frac{1}{u}$ im Nachhinein gerechtfertigt ist. Die Lösung des Anfangswertproblems ist damit durch

$$y(x) = u(x) + y_p(x) = \frac{1}{v(x)} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{e^x + \frac{1}{1+x^2}} - \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1+x^2}{1+(1+x^2)e^x} - \frac{e^{-x}}{2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Aufgabe 2:

Seien

$$P(x, y) := x + y, \quad Q(x, y) := yx^2 + 2xy^2 + x - y$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir berechnen vorbereitend

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= 1, \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= 2xy + 2y^2 + 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \Leftrightarrow 1 = 2xy + 2y^2 + 1 \Leftrightarrow ((y = 0) \vee (y = -x)),$$

weshalb die gegebene Differentialgleichung auf keinem offenen $D \subseteq \mathbb{R}^2$ exakt ist.

Gesucht ist ein integrierender Faktor μ auf einer offenen, einfach zusammenhängenden Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ so, dass für $\tilde{P} = \mu P$ und $\tilde{Q} = \mu Q$

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}(x, y) \tag{1}$$

und $\mu(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in D$ gilt. Dem Hinweis folgend versuchen wir:

- $\mu = \mu(x)$: Dann geht (1) in

$$\begin{aligned} \mu(x) &= \mu'(x)(yx^2 + 2xy^2 + x - y) + \mu(x)(2xy + 2y^2 + 1) \\ \Leftrightarrow 0 &= \mu'(x)(yx^2 + 2xy^2 + x - y) + 2y\mu(x)(x + y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in D$ über. Dies sieht wenig Erfolg versprechend aus (y lässt sich nicht eliminieren).

- $\mu = \mu(y)$: Dann liefert (1)

$$\begin{aligned} \mu(y)'(x + y) + \mu(y) &= \mu(y)(2xy + 2y^2 + 1) \\ \Leftrightarrow \mu'(y)(x + y) &= 2y(x + y)\mu(y) \\ \Leftrightarrow \mu'(y) &= 2y\mu(y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in D$. Diese Differentialgleichung für μ hat die Lösung

$$\mu(y) = e^{y^2} > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Damit ist dieses μ tatsächlich ein integrierender Faktor auf $D = \mathbb{R}^2$.

Die, zur ursprünglichen Differentialgleichung äquivalente, exakte Differentialgleichung

$$\tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x + y)e^{y^2}dx + (yx^2 + 2xy^2 + 2x - y)e^{y^2} = 0$$

ist nun zu lösen. Dazu benötigen wir eine Stammfunktion F des Gradientenfeldes $\nabla F = \begin{pmatrix} \tilde{P} \\ \tilde{Q} \end{pmatrix}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} F(x, y) - F(0, 0) &= [F(x, y) - F(0, y)] + [F(0, y) - F(0, 0)] \\ &= \int_0^x \frac{\partial F}{\partial \xi}(\xi, y) d\xi + \int_0^y \frac{\partial F}{\partial \eta}(0, \eta) d\eta = \int_0^x \tilde{P}(\xi, y) d\xi + \int_0^y \tilde{Q}(0, \eta) d\eta \\ &= \int_0^x (\xi + y)e^{y^2} d\xi - \int_0^y \eta e^{\eta^2} d\eta = e^{y^2} \left[\frac{\xi}{2} + \xi y \right]_{\xi=0}^x - \frac{1}{2} [e^{\xi^2}]_{\xi=0}^y \\ &= \left(\frac{x^2}{2} + xy \right) e^{y^2} - \frac{1}{2} e^{y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (x^2 + 2xy - 1) e^{y^2} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Wir wählen $F(0, 0) = -\frac{1}{2}$ und erhalten

$$F(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + 2xy - 1) e^{y^2}$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Die Lösungen des Anfangswertproblems ist also in impliziter Form durch

$$F(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + 2xy - 1) e^{y^2} = \text{const} = F(1, 0) = \frac{1}{2} (1 - 1) e^1 = 0 \quad (2)$$

gegeben.

Daraus lesen wir $x \neq 0$ ab. Wegen der Anfangsbedingung bei $x = 1$, interessieren wir uns für $x > 0$. Dann lässt sich (2) nach y durch

$$0 = (x^2 + 2xy - 1) e^{y^2} \stackrel{e^{y^2} > 0}{\Leftrightarrow} x^2 + 2xy - 1 = 0 \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow} y = \frac{1 - x^2}{2x}$$

auffösen.

Alternativ löst man (2) nach x durch

$$x = -y \pm \sqrt{y^2 + 1}$$

auf. Die zwei Lösungen schneiden sich nicht und wegen der Anfangsbedingung muss

$$x = -y + \sqrt{y^2 + 1} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

gelten.

Aufgabe 3:

Für den gegebenen abgewandelten Potenzreihenansatz gilt

$$\begin{aligned} y(x) &= x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\ xy'(x) &= x \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^{n+\rho} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho) x^{n+\rho-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho) x^{n+\rho} \\ &= x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho) x^n, \\ x^2 y''(x) &= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d^2}{dx^2} x^{n+\rho} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho)(n + \rho - 1) x^{n+\rho-2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho)(n + \rho - 1) x^{n+\rho} = x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho)(n + \rho - 1) x^n \quad (x > 0). \end{aligned}$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$\begin{aligned}
 x^2 y''(x) - x y'(x) + \left(\frac{3}{4} + x^2\right) y(x) &= x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho)(n + \rho - 1) x^n - x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n + \rho) x^n \\
 &\quad + \frac{3}{4} x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^\rho \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0 \quad (x > 0) \\
 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \underbrace{\left[(n + \rho)(n + \rho - 2) + \frac{3}{4} \right]}_{=: f(n + \rho)} x^n &= - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \stackrel{\text{Index-Shift}}{=} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n \quad (x > 0) \\
 \stackrel{\text{Koeffizienten-}}{\Leftrightarrow} \stackrel{\text{vergleich}}{=} f(n + \rho) a_n &= -a_{n-2} \quad \forall n \geq 2, \quad f(1 + \rho) a_1 = 0, \quad f(\rho) = 0.
 \end{aligned}$$

Die determinierende Gleichung

$$f(\rho) = \rho(\rho - 2) + \frac{3}{4} = \rho^2 - 2\rho + \frac{3}{4} = 0$$

hat die Diskriminante $\Delta = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$ und damit genau die Lösungen $\rho_1 = \frac{1}{2}$ und $\rho_2 = \frac{3}{2}$.

- $\rho = \rho_2 = \frac{3}{2}$: Es gilt

$$f(n + \rho) = \left(n + \frac{3}{2}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right) + \frac{3}{4} = n^2 + n = n(n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Rekurrenzgleichungen liefern deshalb

$$\begin{aligned}
 f(\rho + 1) a_1 &= 2 a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0, \\
 f(\rho + n) a_n &= n(n + 1) a_n = -a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\
 \Leftrightarrow a_n &= \frac{-a_{n-2}}{n(n + 1)} \quad \forall n \geq 2.
 \end{aligned}$$

Damit ist $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$a_{2k} = \frac{(-1) a_{2(k-1)}}{(2k)(2k + 1)} = \dots = \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit definiert

$$y_2(x) = x^{\frac{3}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2k} = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k + 1)!} x^{2k+1} = \sqrt{x} \sin(x) \quad (x > 0)$$

eine nichttriviale Lösung der Differentialgleichung.

- $\rho = \rho_1 = \frac{1}{2}$: Es gilt

$$f(n + \rho) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{4} = n^2 - n = n(n - 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Die Rekurrenzgleichungen liefern deshalb

$$\begin{aligned}
 f(\rho + 1) a_1 &= 0 \cdot a_1 = 0, \\
 f(\rho + n) a_n &= n(n - 1) a_n = -a_{n-2} \quad \forall n \geq 2 \\
 \Leftrightarrow a_n &= \frac{-a_{n-2}}{n(n - 1)} \quad \forall n \geq 2.
 \end{aligned}$$

Damit ist a_1 frei wählbar, etwa $a_1 = 0$. Dann ist $a_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und

$$a_{2k} = \frac{(-1) a_{2(k-1)}}{(2k)(2k - 1)} = \dots = \frac{(-1)^k}{(2k)!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit definiert

$$y_2(x) = \sqrt{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{x} \cos(x) \quad (x > 0)$$

eine weitere Lösung der Differentialgleichung.

Damit lautet die allgemeine Lösung der gegebenen Differentialgleichung

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) = \sqrt{x} (C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)) \quad \forall x > 0$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4:

Wir bestimmen zunächst das Spektrum von

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Für das charakteristische Polynom χ_A gilt

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -5 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} \stackrel{\substack{\text{Entw. nach} \\ 2\text{-ter Zeile}}}{=} (2-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 \\ -5 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)((-2-\lambda)(4-\lambda) + 25) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 17) \quad (\lambda \in \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Die Diskriminante Δ des quadratischen Polynomfaktors ist $\Delta = 1 - 17 = -16$. Also ist $\text{spec}(A) = \{2, 1 - 4i, 1 + 4i\}$. Insbesondere ist A diagonalisierbar.

Wir berechnen nun die Eigenräume:

- $E_A(2)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow[\cdot(-1)]{\leftarrow +} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot 5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} \mid \cdot \frac{1}{17} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\cdot(-3)]{\leftarrow +} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E_A(-2) &= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

- $E_A(1 - 4i)$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -3+4i & 0 & 5 \\ 0 & 1+4i & 0 \\ -5 & 0 & 3+4i \end{pmatrix} &\mid \cdot (-3-4i) \sim \begin{pmatrix} 25 & 0 & -15-20i \\ 0 & 17 & 0 \\ -5 & 0 & 3+4i \end{pmatrix} \mid \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ \frac{1}{17} \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3-4i \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 3+4i \end{pmatrix} \xrightarrow[\leftarrow +]{\cdot \frac{1}{5}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{-3-4i}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E_A(1-4i) &= \text{lin} \left\{ \begin{pmatrix} 3+4i \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

- $E_A(1 + 4i)$: Wird nicht benötigt.

Damit bilden

$$\begin{aligned}\varphi_1(x) &= e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \varphi_2(x) &= \operatorname{Re} \left(e^{(1-4i)x} \begin{pmatrix} 3+4i \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = e^x \left[\cos(4x) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \sin(4x) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \\ \varphi_3(x) &= \operatorname{Im} \left(e^{(1-4i)x} \begin{pmatrix} 3+4i \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = e^x \left[\cos(4x) \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(4x) \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \quad (x \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem $\Phi = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \varphi_3)$ für $y' = Ay$.

Bestimme die Lösung $\vec{c}$ des linearen Gleichungssystems

$$y(0) = \Phi(0)\vec{c}$$

durch:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \end{pmatrix} &\begin{array}{l} \leftarrow \boxed{} \\ \leftarrow \boxed{} \\ \leftarrow \boxed{} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{} \cdot (-3) \\ \leftarrow \boxed{}_+ \end{array} \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \boxed{} \\ \leftarrow \boxed{} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Damit ist

$$y(x) = \Phi(x)\vec{c} = e^{2x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^x \left[\cos(4x) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + \sin(4x) \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \right] \quad (x \in \mathbb{R})$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems.