Karlsruhe Institute of Technology

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann

WS 2017/18
27. Januar 2018

Höhere Mathematik III für die Fachrichtung Physik

Übungsklausur

Aufgabe 1 (7+3=10 Punkte)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$(1+x^2)y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie mit Hilfe eines (gewöhnlichen) Potenzreihenansatzes $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ die Lösung des dazugehörigen Anfangswertproblems mit $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (1).
Hinweis: d'Alembert führt nur mit sehr viel Aufwand zum Ziel...

Aufgabe 2 (5+5=10 Punkte)

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$(x^2-1)\sin(y)\,y' + 2x\cos(y) = 2x - 2x^3 \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung (2) nicht exakt ist und bestimmen Sie einen integrierenden Faktor $\mu : D \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ auf einer möglichst großen, einfach zusammenhängenden Menge $D \ni (\sqrt{2}, 0)$ der Form $\mu(x,y) = \psi(x^2-1)$ mit einer Funktion $\psi : (1,\infty) \to \mathbb{R}$.

(b) Geben Sie die Lösungen der Differentialgleichung (2) in impliziter Form an und bestimmen Sie diejenige Lösung mit $y(\sqrt{2}) = 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ e^t \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad y(\pi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

— Bitte wenden! —

Aufgabe 4 (5+5=10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Lösung des Rand- und Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \partial_t u(x,t) - \partial_x u(x,t) &= 0, && (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty), \\ u(x,0) &= 2, && x \in (0,1), \\ u(1,t) &= \frac{2}{1+t^2}, && t \in (0,\infty). \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie alle *radialsymmetrischen* Lösungen $u \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^d \setminus \{0\}) \cap \mathscr{C}(\mathbb{R}^d)$ der partiellen Differentialgleichung

$$x \cdot \nabla u(x) + \frac{\|x\|}{1+\|x\|} u(x) + \|x\| u(x)^2 = 0, \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \tag{3}$$

mit $u(0) = 1$.

Viel Erfolg!